Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
K. KNOPP, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

67. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. MÄRZ 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

67. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Bauer, F. L., und K. Samelson, Polynomkerne und Iterationsverfahren 93
Bieberbach, L., Eine Bemerkung zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete 99
Grauert, H., und R. Remmert, Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete 103
Grunsky, H., Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. I 129
Heinhold, J., Zur konformen Abbildung schlichter Gebiete 133
Hofmann, J. E., Zur Entwicklungsgeschichte der Eulerschen Summenformel . . . 139
Lense, J., Bemerkungen zur Verwendung der Elementarteiler bei Paaren von nicht zerfallenden Kegelschnitten 147
Lenz, H., Über die elliptischen Funktionen von Jacobi 153
Perron, O., Ein neuartiges diophantisches Problem 176
Steuerwald, R., Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. II 181
Tietze, H., Über Schachturnier-Tabellen 188

Bauer, F. L. u. K. Samelson
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 93—98 (1957)

Polynomkerne und Iterationsverfahren

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Friedrich L. Bauer und Klaus Samelson

Die ursprüngliche Bernoullische Methode hat in jüngster Zeit beträchtliche Ausweitungen erfahren. Die Bernoullische Verfahrensklasse umfaßt heute einen breiteren Anwendungsbereich (z.B. Faktorisierung von Polynomen, simultane Nullstellenbestimmung, Bestimmung von Matrixeigenwerten und -Vektoren) und mannigfache Varianten der numerischen Durchführung, wie z.B. den *QD*-Algorithmus [4] und die *LR*-Transformation [5] von Rutishauser oder die Treppeniteration des einen der Verf. [2], [3]. Unter den zahlreichen Querverbindungen zu algebraischen Problemkreisen sei ein Zusammenhang der Treppeniteration mit der allgemeinen Theorie der Orthogonalpolynome herausgegriffen, insbesondere eine Beziehung zu der Formel von Christoffel-Darboux für Polynomkerne[1]). Als heuristisches Mittel führt sie auf eine Konvergenzbeschleunigung der Treppeniteration; es ergibt sich im Limes eine Konvergenz wie die des Newton-Verfahrens (bei gleichem Arbeitsaufwand). Die offensichtlichen numerischen Vorzüge der Treppeniteration werden jedoch aufrecht erhalten.

1. Variante der Bernoulli-Iteration

Wir gehen von einer Variante [1] der klassischen Bernoullischen Methode aus, die zwanglos auf das Verfahren der Treppeniteration [2] führt. Dabei wählen wir eine Schreibweise, die gegenüber unseren früheren Darstellungen nur unwesentlich modifiziert ist dadurch, daß $P(x)$ durch $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ ersetzt wird. Hier, wie im folgenden, seien λ_μ, $\mu = 1 \ldots n$, die Nullstellen von $P(x)$; es sei

$$|\lambda_n| \leqq |\lambda_{n-1}| \leqq \cdots \leqq |\lambda_1|.$$

Rechenvorschrift I (Bernoulli-Lagrange-*Variante*):

Gegeben: $P(x) \in \bar{\pi}_n$ [2])

Ausgangsnäherung: $q^{(0)}(x) \in \pi_{n-1}$

Algorithmus: Für $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{P(x) - \dfrac{P(0)}{q^{(i)}(0)}\, q^{(i)}(x)}{x} = q^{(i+1)}(x).$$

[1]) Siehe etwa G. Szegö, Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. Band 23 (1939).

[2]) π_n sei der Raum der Polynome vom Höchstgrad n, $\bar{\pi}_n$ der Raum der Polynome vom genauen Grad n, deren führender Koeffizient 1 ist.

Satz I. *Im Algorithmus der Rechenvorschrift I streben mit linearer Konvergenz*

$$\left.\begin{aligned} -\frac{P(0)}{q^{(i)}(0)} &\to \lambda_n \\ q^{(i)}(x) &\to \frac{P(x)}{x-\lambda_n} \in \overline{\pi}_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{ für } i \to \infty$$

falls $|\lambda_n| < |\lambda_\mu|$, $\mu \neq n$ *und* $q^{(0)}(\lambda_n) \neq 0$.

Falls $\lambda_n = 0$, ist der Algorithmus stationär und konvergiert trivialerweise. Andernfalls gilt in der Umgebung von $z = 0$ die TAYLOR-Entwicklung

$$R(z) = \frac{q^{(0)}(z)}{P(z)} = \frac{q^{(0)}(0)}{P(0)} - \frac{q^{(0)}(0)\,q^{(1)}(0)}{(P(0))^2} z + \frac{q^{(0)}(0)\,q^{(1)}(0)\,q^{(2)}(0)}{(P(0))^3} z^2 - + \cdots,$$

aus der, durch Vergleich mit der nach geometrischen Reihen entwickelten und aufsummierten Partialbruchzerlegung von $R(z)$, die Aussagen von Satz I und der Zusammenhang mit dem klassischen BERNOULLI-Verfahren sofort ersichtlich sind. Es ergibt sich auch, daß der Algorithmus nur versagt, wenn in der obenstehenden TAYLOR-Reihe ein Koeffizient verschwindet.

2. Treppeniteration

Ein zweiter Lauf der BERNOULLI-Iteration, mit $\frac{P(x)}{x-\lambda_n}$ anstatt $P(x)$ liefert $\frac{P(x)}{(x-\lambda_n)(x-\lambda_{n-1})}$, falls $|\lambda_{n-1}| < |\lambda_\mu|$, $\mu \neq n$, $n-1$. Ein dritter, vierter, ... l-ter Lauf ($l \leqq n$) kann sich entsprechend anschließen.

Die Treppeniteration unterscheidet sich von diesem Vorgehen nur insofern, als bereits die jeweiligen Zwischenergebnisse des k-ten Iterationslaufs an Stelle von $\frac{P(x)}{(x-\lambda_n)\dots(x-\lambda_{n-k+1})}$ zur Berechnung der $(k+1)$-ten Iterationsreihe dienen.

Wir gelangen so zur

Rechenvorschrift II (Treppeniteration):

Gegeben: $q_n^{(i)}(x) \equiv P(x) \in \overline{\pi}_n$

Ausgangsnäherungen: $q_\mu^{(0)}(x) \in \pi_\mu$, $\mu = n-1, n-2, \dots, n-l \geqq 0$

Algorithmus: Für $i = 0, 1, 2, \dots$

für $\mu = n-1, n-2, \dots, n-l$

$$\frac{q_{\mu+1}^{(i)}(x) - \frac{q_{\mu+1}^{(i)}(0)}{q_\mu^{(i)}(0)} q_\mu^{(i)}(x)}{x} = q_\mu^{(i+1)}(x).$$

Satz II. *Im Algorithmus der Rechenvorschrift II strebt, abgesehen von gewissen singulären Fällen*[3] *für* $i \to \infty$ $(\mu = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ n-l)$

$$-\frac{q_{\mu+1}^{(i)}(0)}{q_{\mu}^{(i)}(0)} \to \lambda_{\mu+1} \quad \text{falls} \quad |\lambda_{\mu+2}| < |\lambda_{\mu+1}| < |\lambda_{\mu}|\ ^{4})$$

$$q_{\mu}^{(i)}(x) \to (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_{\mu}) \in \overline{\pi}_{\mu} \quad \text{falls} \quad |\lambda_{\mu+1}| < |\lambda_{\mu}|\ ^{5}).$$

Man beachte, daß die Reihe der $q_k^{(i)}(x)$ konvergieren kann, ohne daß die vorhergehende Reihe es tut.

Der Konvergenzbeweis für diese simultane Iteration ist komplizierter als in 1.; vgl. [2], wo ebenfalls $P(x)$ durch $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ zu ersetzen ist.

3. Polynomkerne

Die (reellen) Polynome $p_\nu(x) \in \overline{\pi}_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, seien orthogonal zur Verteilung $d\alpha(x)$

$$\int p_\varrho(x)\, p_\sigma(x)\, d\alpha(x) = \delta_{\varrho\sigma}\|p_\varrho\|^2.$$

Als Polynomkerne bezeichnet man die Ausdrücke

$$K_\mu(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{p_\nu(x)\, p_\nu(y)}{\|p_\nu\|^2}$$

vermöge ihrer Eigenschaft, Einheitskerne im Raum π_μ zu sein:

$$\int K_\mu(x, y)\, g(y)\, d\alpha(y) = g(x) \quad \text{für} \quad g(x) \in \pi_\mu.$$

Es gilt bekanntlich die Formel von Christoffel-Darboux

$$K_\mu(x, y) = \frac{1}{\|p_\mu\|^2} \frac{p_{\mu+1}(x)\, p_\mu(y) - p_\mu(x)\, p_{\mu+1}(y)}{x - y},$$

und die $K_\mu(x, y)$ sind bezüglich x wieder Orthogonalpolynome, jetzt aber zur Verteilung $(x-y)\, d\alpha(x)$.

Die Polynome $q_\mu^{(i)}(x)$, $\mu = n, n-1, \ldots, n-l$, seien aus einem Orthogonalsystem zur Verteilung $d\alpha_i(x)$. Die zugehörigen Polynomkerne lauten bis auf einen belanglosen Faktor

$$\frac{q_{\mu+1}^{(i)}(x)\, q_\mu^{(i)}(y^{(i)}) - q_{\mu+1}^{(i)}(y^{(i)})\, q_\mu^{(i)}(x)}{x - y^{(i)}}, \quad \mu = n-1, \ldots, n-l.$$

Vergleich mit Rechenvorschrift II ergibt, daß die durch einen Schritt der Treppeniteration sich ergebenden Polynome $q_\mu^{(i+1)}(x)$, $\mu = n-1, \ldots, n-l$ Polynomkerne mit $y^{(i)} \equiv 0$ sind. Sie sind damit Orthogonalpolynome zur Verteilung $x\, d\alpha_i(x) = x^{i+1} d\alpha_0(x)$. Auch $q_n^{(i+1)}(x) = P(x)$ gehört zu diesem Orthogonalsystem, wenn $P(x)$ nur einfache Nullstellen hat und die Belegung

[3]) Gekennzeichnet durch das Verschwinden eines der Ausdrücke

$M_\mu = \det|q_i^{(0)}(\lambda_{k+1})|$; $\quad \mu = n-1,\ n-2, \ldots, n-l$; $\quad i, k = \mu, \mu+1, \ldots, n-1$.

[4]) Die erste bzw. die zweite Ungleichung entfällt für $\mu = n-1$ bzw. $\mu = 0$.

[5]) Die Ungleichung entfällt für $\mu = 0$.

$\alpha_0(x) = \sum_{\mu=1}^{n} e_\mu Y(x-\lambda_\mu)$ eine Treppenfunktion ist mit Sprungstellen an den Nullstellen von $P(x)$, so daß also $d\alpha_i(x) = \sum_{\mu=1}^{n} e_\mu \lambda_\mu^i \cdot dY(x-\lambda_\mu)$ ist. All diese Orthogonalsysteme brechen mit $P(x)$ ab wegen $\|P(x)\| = 0$.

Falls $\alpha_0(x)$ monoton ist, also alle e_μ (reell und) positiv und ferner die Nullstellen von $P(x)$ positiv sind, ist das Grenzverhalten der Treppeniteration aus der klassischen Theorie der Orthogonalpolynome heraus leicht zu verstehen: $q_\mu^{(i)}(x)$ ist dann dasjenige Polynom aus $\overline{\pi}_\mu$, dessen Norm bezüglich des (monotonen) $\alpha_i(x)$ minimal ist. Mit wachsendem i erdrücken die zu den μ betragsgrößten Sprungstellen λ_ν gehörigen Gewichte $\lambda_\nu^i e_\nu$ alle anderen Gewichte, so daß die Minimallösung gegen ein Polynom mit eben diesen Sprungstellen als Nullstellen strebt.

Die getroffenen Voraussetzungen sind aber in Satz II ebensowenig notwendig wie gar die Voraussetzung, daß die Ausgangsnäherung ein Orthogonalsystem ist, also einer dreigliedrigen Rekursionsformel genügt.

4. NEWTON-artige Konvergenz

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Ziel unserer Arbeit. Nach dem vorigen Abschnitt liegt es zunächst nahe, bei der BERNOULLI-LAGRANGE-Variante von 1. die Auszeichnung $y_i = 0$ in der CHRISTOFFEL-DARBOUX-Formel fallen zu lassen und y_i jeweils gleich der besten schon erhaltenen Approximation für $\lambda_n (y_i = \beta_i)$ zu setzen. Man erhält damit

Rechenvorschrift III (Polynom-Iteration mit NEWTON*-artiger Konvergenz):*

Gegeben: $P(x) \in \overline{\pi}_n$

Ausgangsnäherungen: $q^{(0)}(x) \in \pi_{n-1}$; $\beta^{(0)}$

Algorithmus: Für $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{P(x) - \dfrac{P(\beta^{(i)})}{q^{(i)}(\beta^{(i)})}\, q^{(i)}(x)}{x - \beta^{(i)}} = q^{(i+1)}(x)$$

$$\beta^{(i)} - \frac{P(\beta^{(i)})}{q^{(i)}(\beta^{(i)})} = \beta^{(i+1)}.$$

Falls die Iteration nun noch konvergiert, strebt

$$q^{(i)}(x) \to \frac{P(x)}{x - \lambda_\nu}$$

und

$$\beta^{(i)} \to \lambda_\nu.$$

Ähnlich dem NEWTON-Verfahren herrscht jedoch nur noch dann Konvergenz, wenn die Ausgangsnäherungen $q^{(0)}(x)$ und β_0 in einer gewissen Umgebung einer Lösung liegen. Dafür kann jedoch nunmehr jede einfache Nullstelle quadratisch approximiert werden. Der Beweis kann nach klassischen

Methoden[6]) geführt werden, die elementare, aber etwas umständliche Durchführung der (mehrdimensionalen) TAYLOR-Entwicklung soll hier nicht wiedergegeben werden.

5. Treppeniteration mit NEWTON-artiger Konvergenz

Als entsprechende Verallgemeinerung der Treppeniteration wird man erwarten, daß nunmehr Polynomkerne mit den nach Rechenvorschrift III definierten $\beta^{(i)}$ die Iteration tragen. Dabei käme jedoch nur für die betragskleinste Nullstelle quadratische Konvergenz zustande. Wir lassen diesen Fall beiseite[7]) und wenden uns sogleich einer allgemeineren Rechenvorschrift zu, wobei $\beta^{(i)}$ nicht mehr von μ unabhängig ist, sondern [für die Bestimmung von $q_\mu^{(i+1)}(x)$] sich gerade aus der erzielten Approximation für $\lambda_{\mu+1}$ ergibt. Dabei geht auch der Zusammenhang mit Polynomkernen wieder gänzlich verloren. Wir haben die

Rechenvorschrift IV (Treppeniteration mit NEWTON*-artiger Konvergenz):*

Gegeben: $q_n^{(i)}(x) \equiv P(x) \in \overline{\pi}_n$

Ausgangsnäherungen: $\left.\begin{array}{l} q^{(0)}(x) \in \pi_\mu \\ \beta_\mu^{(0)} \end{array}\right\} \quad \mu = n-1, n-2, \ldots, n-l \geqq 0$

Algorithmus: Für $i = 0, 1, 2, \ldots$

für $\mu = n-1, n-2, \ldots, n-l$

$$\frac{q_{\mu+1}^{(i)}(x) - \dfrac{q_{\mu+1}^{(i)}(\beta_{\mu+1}^{(i)})}{q_\mu^{(i)}(\beta_{\mu+1}^{(i)})}\, q_\mu^{(i)}(x)}{x - \beta_{\mu+1}^{(i)}} = q_\mu^{(i+1)}(x)$$

$$\beta_{\mu+1}^{(i)} - \frac{q_{\mu+1}^{(i)}(\beta_{\mu+1}^{(i)})}{q_\mu^{(i)}(\beta_{\mu+1}^{(i)})} = \beta_{\mu+1}^{(i+1)}.$$

Im Konvergenzfall strebt

$$q_\mu^{(i)}(x) \to (x - \lambda_{\alpha_1})(x - \lambda_{\alpha_2}) \ldots (x - \lambda_{\alpha_\mu})$$

und

$$\beta_{\mu+1}^{(i)} \to \lambda_{\alpha_\mu}.$$

Konvergenz herrscht wiederum, wenn die Ausgangsnäherung in einer gewissen Umgebung einer Lösung ist, die Reihenfolge der Nullstellen braucht wiederum nicht mehr eine solche nach Beträgen sein. Einfache Nullstellen werden quadratisch approximiert, für den Beweis gilt die Bemerkung am Schluß von 4.

6. Diskussion der numerischen Durchführung

Gegenüber der Treppeniteration hat die Rechenvorschrift IV den Vorteil der im Limes quadratischen und damit erheblich rascheren Konvergenz. Sie ist also von großem Nutzen, wenn die linear konvergente Treppeniteration

[6]) Siehe etwa D. R. HARTREE, Numerical Analysis, Oxford 1952, p. 191.

[7]) Er entspricht der Methode der Nullpunktverschiebung beim QD-Algorithmus von RUTISHAUSER [3].

langsam konvergiert. Je schlechter jedoch die Ausgangsnäherung, um so weniger kann man sich praktisch auf die nur im Limes definierte quadratische Konvergenz verlassen. Es wird sich im allgemeinen empfehlen, durch einige wenige Schritte der gewöhnlichen Treppeniteration eine gewisse definierte Ausgangsnäherung herzustellen und dann mit quadratischer Konvergenz weiter zu iterieren. Geschieht dies nicht zu früh, so stellen sich die Nullstellen auch nach einer Ordnung der Beträge ein. Insbesondere ist stets zu beachten, daß nicht mehr für jede Ausgangsnäherung Konvergenz herrscht; es dürfte sich also schon deshalb empfehlen, nicht zu früh mit der Konvergenzbeschleunigung zu beginnen.

Literatur

[1] Bauer, F. L.: Quadratisch konvergente Durchführung der Bernoulli-Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. **1954**, 275—303. — [2] Bauer, F. L.: Direkte Faktorisierung eines Polynoms. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. **1956**, 163—203. — [3] Bauer, F. L.: Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte Verfahren zur Lösung algebraischer Eigenwertprobleme. Zamp (im Druck). — [4] Rutishauser, H.: Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Basel u. Stuttgart: Birkhäuser 1956. — [5] Rutishauser, H.: Report on the Solution of Eigenvalue Problems with the *LR*-Transformation. In: NBS Appl. Math. Ser. Nr. 49, Washington (im Erscheinen).

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 10. November 1956)

Bieberbach, L.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 99—102 (1957)

Eine Bemerkung zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Ludwig Bieberbach

Zu den vielen methodisch wertvollen Gedanken, mit denen G. Faber die Mathematik bereichert hat, gehört sein Verfahren zur Untersuchung des Randverhaltens der konformen Kreisabbildung [*1*]. Daraus entwickelte sich die Grötzsche Flächenstreifenmethode und aus dieser wieder ist der Begriff der extremalen Länge entstanden. Er wird in dieser kleinen Note Verwendung finden.

Vor geraumer Zeit hat der Verf. [*2*] mit Riemannschen Methoden den Riemannschen Satz bewiesen, daß jedes n-fach zusammenhängende Gebiet umkehrbar eindeutig und konform auf eine n-blättrige Kreisscheibe abgebildet werden kann. H. Grunsky [*3*] hat einen mit einfacheren Hilfsmitteln auskommenden Beweis angegeben und auch die Unität geklärt.

Man kann sich fragen, welche Bedeutung die kreisförmige Begrenzung, und zwar durch den gleichen Kreis in allen Etagen bei dem Riemannschen Satz spielt. Die Antwort lautet: so gut wie keine, das Wesentliche ist die Verteilung der Verzweigungspunkte. Das will ich in dieser Note für den Fall zweifach zusammenhängender Gebiete begründen. Ich beweise nämlich:

Es seien C_1 und C_2 die Ränder zweier einfach zusammenhängender schlichter Gebiete G_1 und G_2. Der Durchschnitt $G_1 \cap G_2$ soll nicht leer sein. C_1 und C_2 sollen beide aus je mehr als einem Punkt bestehen und sollen mindestens einen gemeinsamen Punkt haben, der aus $G_1 \cap G_2$ längs einem gemeinsamen Weg erreichbar ist. Dann kann jedes vorgegebene zweifach zusammenhängende Gebiet ohne punktförmige Randkomponente umkehrbar eindeutig und konform auf ein zweiblättriges Riemannsches *Flächenstück G abgebildet werden, das im einen Blatt von einer über C_1 gelegenen Randkomponente, im anderen Blatt von einer über C_2 gelegenen Randkomponente begrenzt wird. Es entsteht, indem man G_1 und G_2 durch zwei ihrem Durchschnitt angehörige passend gewählte Verzweigungspunkte vereinigt*[1]).

Der Satz erinnert in etwas daran, daß jedes einfach zusammenhängende Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten auf ein anderes solches schlichtes

[1]) Man denke sich die beiden in Aussicht genommenen Verzweigungspunkte durch eine $G_1 \cap G_2$ angehörige Jordan-Kurve J verbunden, schneide G_1 und G_2 längs J auf und verhefte die beiden aufgeschnittenen Gebiete längs J zur zweiblättrigen Riemannschen Fläche.

Gebiet mit beliebig vorgegebenem Rand umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden kann.

Den Beweis des Satzes führe ich dadurch, daß ich zeige: Durch passende Wahl der beiden Verzweigungspunkte a und b im Durchschnitt $G_1 \cap G_2$ kann dem Modul des zweifach zusammenhängenden Gebietes jeder beliebige Wert verschafft werden. Diesen Nachweis hinwieder erbringe ich, indem ich zeige, daß der Modul eine stetige Funktion von a und b ist, daß er dem einen Ende seines Variabilitätsintervalls zustrebt, wenn a und b in einem inneren Punkt des zweifach zusammenhängenden Gebietes zusammenrücken, daß er aber dem anderen Ende seines Variabilitätsintervalls sich nähert, wenn *a oder b* einem gemeinsamen Punkt von C_1 und C_2 zustreben.

Für diese in Aussicht genommenen Nachweise ist die Definition des Moduls mit Hilfe der Methode der extremalen Länge besonders geeignet. Bildet man ein zweifach zusammenhängendes Gebiet B ohne punktförmige Randkomponente schlicht und konform auf einen Kreisring $r < |w| < 1$ ab, so ist r eine konforme Invariante der Abbildung, der sog. Modul von B. Zur Definition der extremalen Länge L betrachte man die Familie C aller in B gelegenen im Kleinen rektifizierbaren Kurven, welche die beiden Randkomponenten verbinden und lasse zur Konkurrenz des Variationsproblems

$$\frac{1}{L} = \inf_{\varrho} \iint \varrho^2 \, dx \, dy, \qquad z = x + iy$$

alle über B quadratisch integrierbaren reellwertigen Funktionen $\varrho(z)$ zu, für die $\int \varrho \, ds \geqq 1$ ausfällt für jede Kurve der genannten Kurvenfamilie. L ist ebenfalls eine konforme Invariante von B. Um ihren Zusammenhang mit dem gerade genannten Modul festzustellen, bilde man B wieder auf einen Kreisring $r < |w| < 1$ schlicht konform ab. Dann liefert offenbar

$$\varrho(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{r}}$$

eine Lösung des Variationsproblems. Daher ist

$$L = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}.$$

Nun bilde man ein gegebenes zweiblättriges RIEMANNsches Flächenstück G, das den Bedingungen des Satzes genügt, und das die beiden Verzweigungspunkte a und b hat, und das zudem beschränkt[2]) sein möge, durch

$$\mathfrak{w} = z + \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

auf ein schlichtes zweifach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ mit den beiden Randkomponenten $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ ab. $\mathfrak{C}_2$ möge im Inneren von $\mathfrak{C}_1$ liegen. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$

[2]) Es genügt diesen Fall weiterhin zu betrachten. Denn jedes andere den Bedingungen des Satzes genügende Gebiet läßt sich durch eine passende Hilfsabbildung in ein beschränktes überführen, oder kann doch mit einer gegenüber dem Text etwas modifizierten Hilfsabbildung ganz analog behandelt werden.

und damit auch $\mathfrak{G}$ hängen stetig von a und b ab. Die Definition des Moduls von $\mathfrak{G}$ vermittelst der extremalen Länge läßt aber auch erkennen, daß der Modul, d.h. also die extremale Länge stetig von a und b abhängt[3]). Diese Definition führt ferner zur Einsicht, daß die extremale Länge bei Erweiterung eines Gebietes zunimmt, mit anderen Worten, daß der innere Radius r des konzentrischen Kreisbildes $r<|w|<1$ bei Erweiterung des Gebietes abnimmt. Wenn nun a und b, die beiden Verzweigungspunkte, genügend nahe bei einem inneren Punkt a von G liegen, dann ist das schlichte durch $\mathfrak{w}=z+\sqrt{(z-a)(z-b)}$ erhaltene Gebiet $\mathfrak{G}$ mit einer inneren Randkomponente versehen, die einer Kreisscheibe um a von vorgegebener Kleinheit angehört — da nämlich der eine Zweig von $z+\sqrt{(z-a)(z-b)}$ gegen a konvergiert, wenn b gegen a rückt. Dann besitzt aber, wie eben erwähnt wurde, das konzentrische Kreisbild $r<|w|<1$ von $\mathfrak{G}$ einen inneren Kreisradius, der seinerseits beliebig klein ist. Der Modul r nähert sich also dem einen Ende 0 seines Variabilitätsintervalles $0<r<1$.

Läßt man dann bei festem a den Verzweigungspunkt b einem gemeinsamen Punkt der Ränder C_1 und C_2 der zweiblättrigen Fläche G zustreben, so erhält man durch $\mathfrak{w}=z+\sqrt{(z-a)(z-b)}$ in der $\mathfrak{w}$-Ebene Gebiete $\mathfrak{G}(b)$, deren beide Randkomponenten $\mathfrak{C}_1(b)$ und $\mathfrak{C}_2(b)$ (in der Nähe von $\mathfrak{w}=b$) einen gegen Null konvergierenden Abstand haben. Diese variablen Gebiete bilde man schlicht auf Kreisringe $r(b)<|w|<1$ ab und betrachte die in den Kreisringen erklärten Umkehrungsfunktionen dieser Abbildungen, die also die Ringe in die variablen Gebiete $\mathfrak{G}(b)$ mit dem Engpaß in der Nähe von $\mathfrak{w}=b$ überführen. Nun nehme man an, daß nicht $r(b)\to 1$ gilt, wenn b sich einem gemeinsamen Punkt von C_1 und C_2 nähert. Dann gibt es einen allen Ringen gemeinsamen Durchschnittsring, sagen wir $R<|w|<1$, in dem die genannten Umkehrungsfunktionen eindeutig schlicht und gleichmäßig beschränkt sind. Man wähle eine in $R_1<|w|<R_2$, $R_1=R+\frac{1}{4}(1-R)$, $R_2=1-\frac{1}{4}(1-R)$ gleichmäßig konvergente Teilfolge aus. Ihre Grenzfunktion kann nicht konstant sein. Denn alle Glieder der gleichmäßig konvergenten Folge bilden den Kreis $|w|=\frac{1+R}{2}$ auf Kurven ab, die die innere Randkomponente $\mathfrak{C}_2(b)$ von $\mathfrak{G}(b)$ umschließen. Deren Durchmesser konvergiert aber nicht gegen 0, wenn b sich einem Schnittpunkt von C_1 und C_2 nähert, während a festgehalten wird. Wäre die Grenzfunktion konstant, so müßten bekanntlich die Ableitungen der Glieder der Folge gegen 0 streben, was der eben genannten Erscheinung einer Bildkurve widerspricht, deren Länge nicht nach 0 strebt. Ist aber die Grenzfunktion nicht konstant, so bildet sie bekanntlich den Ring $R_1<|w|<R_2$ schlicht ab. Der absolute Betrag der Ableitung der Grenzfunktion in den Punkten des Kreises $|w|=\frac{1+R}{2}$ liegt daher oberhalb einer positiven Schranke. Daher ist das auch für die Glieder der konvergenten Folge bei genügend großer

[3]) Der Beweis gelingt auch mit Hilfe einer passenden Verallgemeinerung des Carathéodoryschen Begriffs „Kern einer Gebietsmenge" auf zweifach zusammenhängende Gebiete.

Gliednummer ebenso. Daher geht nach dem Koebeschen Verzerrungssatz der Kreisring $R_1 < |w| < R_2$ in $\mathfrak{C}_2(b)$ umschließende zweifach zusammenhängende Bereiche über, deren Ränder für alle Glieder der Folge voneinander einen Abstand oberhalb einer positiven Schranke haben. Das widerspricht der Existenz des erwähnten Engpasses.

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. Es sei noch folgende Bemerkung angefügt. Die Voraussetzung, daß der Durchschnitt $C_1 \cap C_2$ nicht leer ist, ist wesentlich. Denn läge C_2 ganz im Inneren von C_1, so wäre der Modul r eines jeden zweiblättrigen aus G_1 und G_2 aufgebauten Gebietes G kleiner als der Modul r des zweifach zusammenhängenden schlichten Gebietes, das zwischen C_1 und C_2 eingespannt ist, so daß also derartige Gebiete nicht das ganze Modulintervall ausschöpfen können.

Offenbar genügt es laut Beweisgang für die Gültigkeit des Satzes, wenn man a festhält und b auf einer festgewählten stetigen Kurve aus $G_1 \cap G_2$ annimmt, die a mit einem gemeinsamen Punkt von C_1 und C_2 verbindet, wobei natürlich diese Kurven in ihrer Projektion auf die z-Ebene gemeint sind.

Die Frage der Unität bedarf noch weiterer Überlegung, ebenso wie der Wunsch, analoge Sätze auch für mehr als zweifach zusammenhängende Gebiete auszusprechen und zu begründen. Es kam mir aber in dieser Note nur darauf an, die Aufmerksamkeit auf einen Sachverhalt zu lenken, der mir recht merkwürdig erscheint.

Literatur

[1] Faber, G.: Über den Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung. Sitzgsber. Bayr. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. **1922**, 91—100. — [2] Bieberbach, L.: Über einen Riemannschen Satz aus der Lehre von der konformen Abbildung. Sitzgsber. Berl. math. Ges. **1925**, 6—9. — [3] Grunsky, H.: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf mehrblättrige Kreise. Sitzgsber. Pr. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. **1937**, 40—46; II **1941**, Nr. 11, 1—8.

Berlin-Dahlem, Gelferstr. 16

(Eingegangen am 21. April 1956)

Grauert, H., u. R. Remmert
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 103—128 (1957)

Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Hans Grauert und Reinhold Remmert

Einleitung

1. In der algebraischen Geometrie hat man seit jeher den Singularitäten der algebraischen Mannigfaltigkeiten ein besonderes Interesse entgegengebracht (s. z.B. [7], [27], [41]). Es zeigte sich bald, daß die Singularitäten in zwei Klassen zerfallen. Einmal gibt es Punkte, in denen die Singularität lediglich durch die Art der Einbettung der algebraischen Fläche in den projektiven Raum bedingt ist; in diesem Falle kann man stets eine Umgebung des singulären Punktes holomorph auf eine Hyperkugel abbilden. Zum anderen fand man aber auch Punkte, die nicht in dem soeben beschriebenen Sinne uniformisierbar sind. Es ist ein bekanntes Problem der algebraischen Geometrie, diese nicht uniformisierbaren Singularitäten durch birationale Transformationen zu eliminieren[1]).

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hat man im Gegensatz zur algebraischen Geometrie lange Zeit gezögert, singuläre Punkte in den Kreis der Betrachtungen einzubeziehen. Die gesamte Theorie der Holomorphiegebiete ist z.B. im Ergebnisbericht von Behnke und Thullen [2] lediglich für die schlichten und unverzweigten Gebiete über dem Raum C^n von n komplexen Veränderlichen entwickelt worden; verzweigte Gebiete wurden nicht betrachtet. Bis heute fehlt die Übertragung auf beliebige Gebiete über dem C^n.

Erst in der neueren Zeit ist man auch in der komplexen Analysis dazu übergegangen, verzweigte Gebiete — sog. Riemannsche Gebiete — zuzulassen und die algebroiden Funktionselemente zu solchen Gebilden zusammenzufassen. Dabei zeigte sich, daß auch hier nicht-uniformisierbare Punkte auftreten. In einer Arbeit von Behnke und Stein [5] wird explizit das analytische Gebilde der Funktion $\sqrt{z_1 z_2}$ als verzweigtes Gebiet über dem C^2 aufgewiesen, das über dem Nullpunkt einen nicht-uniformisierbaren Punkt besitzt.

2. Wie in der klassischen Funktionentheorie hat man auch in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen neben den konkreten Gebieten über

[1]) Für zwei- sowie dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeiten ist bekannt, daß sich die Singularitäten durch birationale Transformationen auflösen lassen. Vergleiche hierzu etwa [24], [25], [43]. Für den Fall höherer Dimension konnte das Problem bis heute noch nicht gelöst werden.

dem C^n abstrakte Gebilde definiert. Nach dem Vorbild der allgemeinen Topologie der Mannigfaltigkeiten wurden aber auch hier zunächst die singulären Punkte ausgeschlossen. Die von CARATHÉODORY [8], TEICHMÜLLER [38] und HOPF [26] definierten komplexen Mannigfaltigkeiten enthalten nur uniformisierbare Punkte[2]). Inzwischen ist man jedoch auch in der Funktionentheorie auf abstrakten Gebilden dazu übergegangen, die nicht-uniformisierbaren Singularitäten als gleichberechtigt anzusehen. Das führte BEHNKE und STEIN [5] sowie CARTAN [13], [15] zur Definition des komplexen Raumes (espace analytique général). Darunter versteht man einen HAUSDORFFschen Raum, dem in bestimmter Weise eine komplex-analytische Struktur aufgeprägt ist. Komplexe Räume haben folgende Eigenschaft: Jeder Punkt besitzt eine Umgebung, die zu einem sog. analytischen Repräsentanten analytisch äquivalent ist. Dabei ist ein analytischer Repräsentant bei BEHNKE und STEIN eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung einer offenen Hyperkugel H im C^n; analytisch-verzweigt heißt, daß die Grundpunktmenge der Verzweigungspunkte das genaue Nullstellengebilde einer in H nicht identisch verschwindenden holomorphen Funktion ist (zur genauen Beschreibung vgl. § 1, 1—4). CARTAN dagegen verwendet als analytische Repräsentanten sog. Überlagerungsräume von analytischen Mengen (s. § 2, 1—3). Es ist bislang noch ein offenes Problem, ob beide Definitionen äquivalent sind.

3. Über die Funktionentheorie in verzweigten Gebieten über dem C^n sowie auch in komplexen Räumen ist bislang nur wenig bekannt geworden. In der vorliegenden Arbeit wird an Hand eines Beispiels gezeigt, daß in der Umgebung einer nicht-uniformisierbaren Stelle eines komplexen Raumes im allgemeinen Aussagen gelten, die in keiner Analogie zu den Sätzen stehen, die von der komplexen Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten her bekannt sind. So zeigen wir in § 2:

I. *Eine rein* $(n-1)$*-dimensionale analytische Menge in einem n-dimensionalen komplexen Raum ist lokal nicht stets das genaue Nullstellengebilde einer lokal-holomorphen Funktion* $(n \geq 3)$.

II. *Zwei rein* $(n-1)$*-dimensionale analytische Mengen in einem n-dimensionalen komplexen Raum können sich punkthaft schneiden* $(n \geq 3)$. *Die Schnittmenge braucht also nicht wie in komplexen Mannigfaltigkeiten eine rein* $(n-2)$*-dimensionale analytische Menge zu sein.*

III. *Es gibt komplexe Räume beliebig großer Dimension mit meromorphen Funktionen, deren Unbestimmtheitsstellen isoliert liegen.*

In § 3 und 4 untersuchen wir verzweigte RIEMANNsche Gebiete über dem C^n. OKA hat 1953 bewiesen [30], daß jedes unverzweigte Holomorphiegebiet holomorph-konvex ist. Ferner zeigte er, daß die unverzweigten Holomorphiegebiete durch eine lokale Randeigenschaft charakterisiert werden können. Er bewies nämlich, daß jedes unverzweigte RIEMANNsche Gebiet über dem C^n

[2]) Der Ausdruck „*komplexe Mannigfaltigkeit*" wird unseres Wissens erstmals in [26] benutzt; in [8] sowie [38] handelt es sich indessen um die gleiche Begriffsbildung.

genau dann ein Holomorphiegebiet ist, wenn jeder Randpunkt ein sog. pseudokonvexer Randpunkt ist. Wir zeigen, daß diese Sätze für verzweigte RIEMANNsche Gebiete über dem C^n im allgemeinen falsch sind, wenn $n \geqq 3$. Es ergibt sich nämlich:

IV. *Es gibt endlich-blättrige, n-dimensionale Holomorphiegebiete, die aus lauter uniformisierbaren Punkten bestehen und mindestens einen nicht pseudokonvexen Randpunkt besitzen, $n \geqq 3$.*

V. *Es gibt endlich-blättrige, n-dimensionale Holomorphiegebiete, die aus lauter uniformisierbaren Punkten bestehen und nicht holomorph-konvex sind, $n \geqq 3$.*

Aus V. folgt insbesondere, daß die verzweigten Holomorphiegebiete nicht gegenüber umkehrbar holomorphen Abbildungen invariant sind. Für unverzweigte RIEMANNsche Gebiete ist bekanntlich die Eigenschaft, Holomorphiegebiet zu sein, eine analytische Invariante (vgl. z.B. [*12*], p. 154).

§ 1. Komplexe Räume

1. Betrachtet man eine n-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit in der Umgebung einer Singularität [z.B. $w^q - z_1 z_2 \dots z_n = 0$, $q > 1$, $n > 1$, im Nullpunkt[3])], so stellt man fest, daß diese dort stets die Struktur einer endlich-blättrigen, analytisch-verzweigten Überlagerung besitzt. Es werde daher zunächst dieser Begriff definiert (vgl. auch [*21*], [*23*]).

Def. 1 *(Analytisch-verzweigte Überlagerung). Ein Tripel $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ heißt eine (n-dimensionale) endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung eines Gebietes G des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n, wenn folgendes gilt:*

0) *R ist ein* HAUSDORFFscher *Raum; Φ ist eine stetige, eigentliche, nirgends entartete Abbildung*[4]) *von R in G.*

1) *Es gibt eine analytische Menge*[5]) *A in G, derart, daß $\Phi^{-1}(A)$ den Raum R nirgends zerlegt und die Menge $R - \Phi^{-1}(A)$ durch Φ lokal-topologisch in G abgebildet wird.*

Dabei sagen wir, daß eine Teilmenge S eines topologischen Raumes R den Raum R *nirgends zerlegt*, wenn S nirgends dicht[6]) in R liegt und für jede

[3]) Vgl. etwa [*5*], p. 4, wo diese algebraische Mannigfaltigkeit für den Fall $n = q = 2$ ausführlich diskutiert wird.

[4]) Eine stetige Abbildung φ eines topologischen Raumes R in einen topologischen Raum R' heißt *eigentlich*, wenn das φ-Urbild jeder kompakten Teilmenge von R' eine kompakte Menge in R ist. φ heißt *nirgends entartet*, wenn das φ-Urbild eines jeden Punktes von R' eine diskrete Menge in R ist.

[5]) Eine Teilmenge M eines Gebietes G des Zahlenraumes C^n heißt eine *analytische Menge* in G, wenn es zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und endlich viele in $U(\mathfrak{z}_0)$ holomorphe Funktionen $f_1(\mathfrak{z}), \dots, f_s(\mathfrak{z})$ gibt, derart, daß ein Punkt $\mathfrak{z}' \in U(\mathfrak{z}_0)$ genau dann zu M gehört, wenn gilt: $f_1(\mathfrak{z}') = \dots = f_s(\mathfrak{z}') = 0$. Zur Theorie der analytischen Mengen vgl. etwa [*13*], [*15*], [*23*], [*33*], [*35*].

[6]) Eine Teilmenge S eines topologischen Raumes R liegt *nirgends dicht* in R, wenn jede nichtleere offene Menge U von R eine nichtleere offene Menge V enthält, die keinen Punkt mit S gemeinsam hat.

offene zusammenhängende Teilmenge $U \subset R$ gilt, daß $U - U \cap S$ zusammenhängend[7]) ist.

Aus Def. 1 folgt sofort: *Ist $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ eine analytisch-verzweigte Überlagerung, so ist der Raum R lokal-zusammenhängend. Die Menge $R - \Phi^{-1}(A)$ liegt dicht in R.*

Ein Punkt $r \in R$ heißt über dem Punkt $\mathfrak{z} = \Phi(r) \in G$ gelegen. Da Φ eigentlich und nirgends entartet abbildet, so liegen über jedem Punkt $\mathfrak{z} \in G$ nur endlich viele Punkte von R. Man kann zeigen, daß über jedem Punkt $\mathfrak{z} \in G - A$ gleich viel Punkte von R liegen; ihre Anzahl heißt die *Blätterzahl* der Überlagerung.

Jedes Gebiet $G \subset C^n$ besitzt die sog. triviale einblättrige Überlagerung (G, ι, G), wo $\iota\colon G \to G$ die Injektion bezeichnet.

Die Punkte von R, in denen Φ nicht lokal-topologisch ist, heißen *Verzweigungspunkte* von R.

Es ist evident, daß R außerhalb der Verzweigungspunkte sich *lokal sphärisch* verhält: in der Umgebung jedes dieser Punkte ist R der $2n$-dimensionalen Zelle homöomorph. In den Verzweigungspunkten ist das im allgemeinen, falls $n \geqq 2$, nicht mehr der Fall [vgl. z.B. die durch $w^2 - z_1 z_2 = 0$ definierte Überlagerung im Punkte über $(0, 0)$]. Man kann jedoch noch folgendes zeigen (vgl. [23]):

Über den gewöhnlichen Punkten[8]) *der analytischen Menge $A \subset G$ liegen nur Windungspunkte von $\mathfrak{R}$.*

Dabei heißt ein Punkt $r \in R$ ein *Windungspunkt* von $\mathfrak{R}$, wenn es eine Umgebung $U(r)$ und eine topologische Abbildung ψ von U auf ein Gebiet W des Raumes der Veränderlichen $w_1, \ldots, w_n$ gibt, derart, daß $\Phi \circ \psi^{-1}$ sich bei geeigneter Numerierung der Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ in der Form

$$z_1 = w_1, \ldots, z_{n-1} = w_{n-1}, z_n = w_n^q + g(w_1, \ldots, w_{n-1})$$

mit einer holomorphen Funktion $g(w_1, \ldots, w_{n-1})$ schreiben läßt.

Alle Windungspunkte einer analytisch-verzweigten Überlagerung $\mathfrak{R}$ sind offensichtlich sphärische Punkte von $\mathfrak{R}$.

2. Die analytisch-verzweigten Überlagerungen sollen zur lokalen Charakterisierung der komplexen Räume herangezogen werden. Dazu benötigen wir jedoch noch den grundlegenden Begriff der holomorphen Abbildung einer

[7]) Wir wollen eine Teilmenge S eines topologischen Raumes R *zusammenhängend* nennen, wenn zwei beliebige Punkte $r_1, r_2 \in S$ stets durch einen in S verlaufenden Weg (Kurve) verbindbar sind. Unter einem Weg in R verstehen wir eine stetige Abbildung $\{r = r(t), 0 \leq t \leq 1\}$ des Einheitsintervalles $0 \leq t \leq 1$ in den Raum R.

[8]) Ein Punkt $\mathfrak{z}_0$ einer analytischen Menge A heißt ein *gewöhnlicher Punkt* von A, wenn A in einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ durch k holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ beschrieben werden kann, deren Funktionalmatrix $(\partial f_\varkappa / \partial z_\nu)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; $\nu = 1, \ldots, n$, in $\mathfrak{z}_0$ vom Range k ist.

analytisch-verzweigten Überlagerung $\mathfrak{R}$ in eine ebensolche Überlagerung $\mathfrak{R}'$. Vorbereitend definieren wir:

Def. 2 *(Holomorphe Funktion in einer analytisch-verzweigten Überlagerung). Eine stetige komplex-wertige Funktion f in einer offenen Menge $W \subset R$ heißt eine holomorphe Funktion in W, wenn es zu jedem Punkt $r \in W - W \cap \Phi^{-1}(A)$ eine Umgebung $U(r) \subset W$ gibt, die durch Φ topologisch auf $\Phi\big(U(r)\big)$ abgebildet wird, derart, daß $f \circ \Phi^{-1}$ eine holomorphe Funktion in $\Phi\big(U(r)\big)$ ist.*

Nunmehr läßt sich der Begriff der holomorphen Abbildung einführen:

Def. 3 *(Holomorphe Abbildung einer analytisch-verzweigten Überlagerung). Sind $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ und $\mathfrak{R}' = (R', \Phi', G')$ zwei analytisch-verzweigte Überlagerungen, so heißt eine stetige Abbildung τ einer offenen Menge $W \subset R$ in R' eine holomorphe Abbildung, wenn folgendes gilt: Ist $f(r')$ eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $W' \subset R'$, so ist $f\big(\tau(r)\big)$ eine holomorphe Funktion in der offenen Menge $\tau^{-1}(W') \subset W$.*

Auf Grund dieser Definition sind die holomorphen Funktionen auf $\mathfrak{R}$ genau die holomorphen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in die Zahlenebene C^1.

3. Komplexe Räume sind topologische Räume, die mit einer sog. komplex-analytischen Struktur versehen sind. Der Begriff der komplex-analytischen Struktur läßt sich besonders elegant fassen, wenn man sich einer von EHRESMANN [17], [18] eingeführten Terminologie bedient (vgl. auch [32]).

Def. 4 *(Komplexe Karte). Eine n-dimensionale, komplexe Karte auf einem* HAUSDORFFschen *Raum X ist ein Paar (U, ψ), wobei U eine offene zusammenhängende Menge von X und ψ eine topologische Abbildung von U auf eine offene Menge einer n-dimensionalen analytisch-verzweigten Überlagerung ist.*

Zwischen komplexen Karten wird eine „Verträglichkeitsbeziehung" definiert:

Def. 5 *(Holomorph verträgliche komplexe Karten). Zwei komplexe Karten (U_1, ψ_1) und (U_2, ψ_2) auf einem* HAUSDORFFschen *Raum X heißen holomorph verträglich, wenn $U_1 \cap U_2$ leer ist oder wenn die Abbildung $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung von $\psi_1(U_1 \cap U_2)$ auf $\psi_2(U_1 \cap U_2)$ ist.*

Komplexe Karten werden nun zu komplexen Atlanten zusammengefaßt.

Def. 6 *(Komplexer Atlas). Ein komplexer Atlas $\mathfrak{A}$ auf einem* HAUSDORFFschen *Raum X ist eine Kollektion von paarweise miteinander holomorph verträglichen komplexen Karten $\{(U_\iota, \psi_\iota), \iota \in J\}$, wobei $\bigcup_{\iota \in J} U_\iota = X$.*

Ein komplexer Atlas $\mathfrak{A}$ auf X heißt *vollständig*, wenn jede komplexe Karte (V, ψ) auf X, die mit allen Karten aus $\mathfrak{A}$ holomorph verträglich ist, zu $\mathfrak{A}$ gehört.

Man zeigt leicht, daß sich jeder komplexe Atlas vervollständigen läßt.

Besitzt ein HAUSDORFFscher Raum X einen komplexen Atlas $\mathfrak{A}$, so ist X im Kleinen einer analytisch-verzweigten Überlagerung homöomorph und somit lokal-zusammenhängend. Daher zerfällt X in zusammenhängende Komponenten $X_\varkappa$, $\varkappa \in \mathsf{K}$. Eine Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{A}$ ist stets, da U zusammenhängend ist, eine komplexe Karte auf genau einer solchen Komponente.

Da man zwei Karten aus $\mathfrak{A}$ auf einer Komponente $X_\varkappa$ stets durch eine endliche Kette von Karten aus $\mathfrak{A}$ miteinander verbinden kann und zwei benachbarte Karten (U_1, ψ_1) und (U_2, ψ_2) stets dieselbe Dimension[9]) besitzen (die Abbildung $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ ist topologisch!), haben alle Karten, die zur selben Komponente $X_\varkappa$ gehören, die gleiche Dimension. Daher kommt jeder Komponente $X_\varkappa$ eine eindeutig bestimmte, *endliche Dimension* $d(X_\varkappa)$ zu.

Die Dimension von X selbst wird nun definiert als: $d(X) = \sup_{\varkappa \in K} d(X_\varkappa)$. $d(X)$ kann unendlich sein.

Haben alle Komponenten $X_\varkappa$ von X die gleiche Dimension d, so nennen wir X *rein d-dimensional*; wir schreiben dann auch: $X = X^d$.

4. Wir sind nun in der Lage, die Begriffe der komplex-analytischen Struktur, des komplexen Raumes usw. einzuführen.

Def. 7 *(Komplex-analytische Struktur). Eine komplex-analytische Struktur in einem* HAUSDORFFschen *Raum X ist ein vollständiger komplexer Atlas auf X.*

Def. 8 *(Komplexer Raum). Ein* HAUSDORFFscher *Raum X mit einer komplex-analytischen Struktur heißt ein komplexer Raum.*

Offenbar kann der Träger R jeder analytisch-verzweigten Überlagerung $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ als komplexer Raum aufgefaßt werden, indem man den auf R einelementrigen komplexen Atlas (R, ι), wo ι die Injektion ist, vervollständigt.

Def. 9 *(Uniformisierbarer Punkt). Ein Punkt x eines komplexen Raumes X heißt ein uniformisierbarer Punkt von X, wenn es eine Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{A}$ gibt, derart, daß $x \in U$ und ψ die Menge U auf die triviale Überlagerung eines Gebietes des C^n abbildet.*

Die komplexen Mannigfaltigkeiten[10]) sind nun spezielle komplexe Räume.

Def. 10 *(Komplexe Mannigfaltigkeit). Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein komplexer Raum, der nur aus uniformisierbaren Punkten besteht.*

In jedem Teilbereich (= offene Menge) $\tilde{X}$ eines komplexen Raumes (bzw. einer komplexen Mannigfaltigkeit) X wird in natürlicher Weise durch die komplex-analytische Struktur von X eine komplex-analytische Struktur induziert, die $\tilde{X}$ zu einem komplexen Raum (bzw. einer komplexen Mannigfaltigkeit) macht. Ferner ist das topologische Produkt zweier komplexer Räume (bzw. zweier komplexer Mannigfaltigkeiten) in natürlicher Weise mit einer komplex-analytischen Struktur versehen und mithin ein komplexer Raum (bzw. eine komplexe Mannigfaltigkeit).

5. In komplexen Räumen läßt sich der Begriff der holomorphen Funktion einführen.

Def. 11 *(Holomorphe Funktion in einem komplexen Raum). Eine komplexwertige Funktion $f(x)$ in einem komplexen Raum X heißt holomorph in X, wenn für jede komplexe Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{A}$ die Funktion $f \circ \psi^{-1}$ eine in $\psi(U)$ holomorphe Funktion ist.*

---

[9]) Nach K. MENGER [28] kommt jedem topologischen Raum R eine wohldefinierte Dimension zu. Dieselbe ist invariant gegenüber topologischen Abbildungen. Vgl. auch HUREWICZ, W., and H. WALLMANN: Dimension Theory, p. 24ff. Princeton 1948.

[10]) Zur Def. der komplexen Mannigfaltigkeiten vgl. auch [26].

Man überlegt sich sofort:

Eine in einem komplexen Raum X gegebene komplex-wertige Funktion $f(x)$ ist bereits dann holomorph in X, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine komplexe Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U$ gibt, so daß $f \circ \psi^{-1}$ in $\psi(U)$ holomorph ist.

Hieraus folgt:

Ist $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ eine analytisch-verzweigte Überlagerung, so ist eine auf R komplex-wertige Funktion f genau dann holomorph auf R im Sinne von Def. 2, wenn sie auf R im Sinne von Def. 11 holomorph ist (wobei R als komplexer Raum aufzufassen ist).

Man überzeugt sich direkt, daß die Summe sowie das Produkt zweier holomorpher Funktionen wieder eine holomorphe Funktion ist. Wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen treten keine Nullteiler bezüglich der Multiplikation auf, wenn der Raum zusammenhängend ist. Daher folgt:

Die Gesamtheit aller in einem komplexen Raum X holomorphen Funktionen bildet einen Ring $R(X)$. Der Ring $R(X)$ ist genau dann ein Integritätsring, wenn der Raum X zusammenhängend ist.

Der Begriff der holomorphen Funktion läßt sich verallgemeinern zum Begriff der holomorphen Abbildung.

Def. 12 *(Holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes). Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt eine holomorphe Abbildung, wenn folgendes gilt: Ist $f(y)$ irgendeine holomorphe Funktion in einem Teilbereich Y^* von Y, so ist $f(\tau(x))$ eine holomorphe Funktion im Bereich $\tau^{-1}(Y^*) \subset X$.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

Eine eindeutige Abbildung τ eines komplexen Raumes X in den Zahlenraum C^n ist genau dann holomorph, wenn die τ beschreibenden n Abbildungsfunktionen $z_1 = f_1(x), \ldots, z_n = f_n(x)$, $x \in X$, holomorphe Funktionen in X sind.

Weiter ergibt sich:

Eine Abbildung τ einer analytisch-verzweigten Überlagerung $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ in eine analytisch-verzweigte Überlagerung $\mathfrak{R}' = (R', \Phi', G')$ ist genau dann holomorph im Sinne von Def. 3, wenn sie holomorph im Sinne von Def. 12 ist (wobei R und R' als komplexe Räume aufzufassen sind).

6. Den Nullstellenmengen holomorpher Funktionen kommt ein besonderes Interesse zu. Wir definieren daher:

Def. 13 *(Analytische Menge). Eine Teilmenge M eines komplexen Raumes X heißt eine analytische Menge in X, wenn es zu jedem Punkt $x' \in X$ eine Umgebung U und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ gibt, so daß ein Punkt $x \in U$ genau dann zu M gehört, wenn gilt: $f_1(x) = \cdots = f_s(x) = 0$.*

Offenbar ist eine analytische Menge immer eine abgeschlossene Menge.

Jede analytische Menge M in einem komplexen Raum X hat in jedem ihrer Punkte x eine wohlbestimmte *Dimension* d'_x [11]). Ein Satz sagt aus, daß stets gilt: $d'_x \equiv 0\,(2)$. Wir setzen $d_x = \frac{1}{2} d'_x$ und nennen d_x die *(komplexe)*

[11]) Vgl. Fußnote [9]).

Dimension von M in x. Faßt man X als analytische Menge in X auf, so stimmt diese Dimension von X in x mit der in 3. definierten Dimension derjenigen zusammenhängenden Komponente von X überein, die x enthält.

Wir benötigen im folgenden:

Ist M eine analytische Menge in einem komplexen Raum X, die keine zusammenhängende Komponente von X enthält, so zerlegt M den Raum X nirgends[12]).

Der Begriff der analytischen Menge wird verallgemeinert zum Begriff der (analytisch) dünnen Menge.

Def. 14 *(Dünne Menge). Eine abgeschlossene Teilmenge D eines komplexen Raumes X heißt eine dünne Menge von der Ordnung k $\left(1 \leqq k \leqq d(X)\right)$, wenn es zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung U und eine in U analytische Menge M gibt, so daß gilt: $D \cap U \subset M$, $d_x(M) \leqq d_x(X) - k$. — Die leere Menge sei dünn von der Ordnung $d(X)+1$.*

Ein leicht zu beweisender Satz ist nun (vgl. [*23*]):

Die nicht-uniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes bilden eine dünne Menge der Ordnung 2[13]).

7. Neben holomorphen Funktionen betrachten wir auch sog. *meromorphe Funktionen*. Wir sagen, in einem komplexen Raum X ist eine meromorphe Funktion $h(x)$ gegeben, wenn folgende Situation vorliegt:

α) *Außerhalb einer in X dünnen Menge P erster Ordnung ist eine holomorphe Funktion $h^*(x)$ gegeben, die in keinen Punkt von P holomorph fortsetzbar ist.*

β) *Zu jedem Punkt $x \in P$ gibt es eine Umgebung U und eine in U holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$, so daß die in $U - P$ holomorphe Funktion $f(x) \cdot h^*(x)$ in ganz U holomorph fortsetzbar ist.*

Die Menge P heißt die *Polstellenmenge* von $h(x)$; man kann zeigen, daß P sogar eine analytische Menge ist[14]).

Eine in einem komplexen Raum X meromorphe Funktion $h(x)$ gibt zu einer holomorphen Abbildung von $X - P$ in die Zahlenebene Anlaß. Faßt man diese Abbildung als Abbildung in die Zahlenkugel auf, so läßt sie sich stets in eine nichtleere Teilmenge P^* von P eindeutig und holomorph fortsetzen. Die Punkte von P^* heißen *außerwesentliche Singularitäten 1. Art* oder *eigentliche Polstellen* der meromorphen Funktion $h(x)$; die Punkte von $P - P^*$ heißen *außerwesentliche Singularitäten 2. Art* oder *Unbestimmtheitsstellen* der meromorphen Funktion $h(x)$. Man kann zeigen, daß $P - P^*$ eine dünne (sogar analytische) Menge 2. Ordnung in X ist[15]).

Für meromorphe Funktionen läßt sich in natürlicher Weise eine Addition, Multiplikation und Division erklären. Es ergibt sich:

Die Gesamtheit $K(X)$ aller in einem zusammenhängenden komplexen Raum X meromorphen Funktionen bildet einen Körper.

---

[12]) Zum Beweise vgl. [*23*].

[13]) Man kann sogar zeigen, daß die nichtuniformisierbaren Punkte eine analytische Menge bilden, vgl. [*15*], Exp. X u. XI.

[14]) Vgl. etwa [*2*] sowie [*23*].

[15]) Vgl. hierzu [*34*].

§ 2. Komplexe Überlagerungsräume analytischer Mengen. Untersuchung eines speziellen komplexen Raumes mit einer Singularität

1. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und M eine analytische Menge in X, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, so ist M in natürlicher Weise mit einer komplex-analytischen Struktur versehen, die M selbst zu einer komplexen Mannigfaltigkeit macht; die Injektion $\iota: M \to X$ ist dabei eine holomorphe Abbildung. Dagegen tragen analytische Mengen mit nichtgewöhnlichen Punkten im allgemeinen keine natürliche komplex-analytische Struktur. Es gibt im C^n $(n \geqq 3)$ sogar analytische Mengen M, die in einem Punkt $\mathfrak{z}_0$ irreduzibel sind und denen in keiner Weise in einer Umgebung $U(\mathfrak{z}_0) \subset M$ eine komplex-analytische Struktur $\mathfrak{A}$ aufgeprägt werden kann, derart, daß die Injektion $\iota: U(\mathfrak{z}_0) \to C^n$ eine holomorphe Abbildung ist (vgl. § 2.7)[16]. Jeder analytischen Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit läßt sich jedoch in eindeutiger Weise ein komplexer Raum zuordnen. Wir definieren:

Def. 15 *(Komplexer Überlagerungsraum). Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und M eine analytische Menge in X, so heißt ein Paar (M^*, μ) ein komplexer Überlagerungsraum von M, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

0) *M^* ist ein komplexer Raum; μ ist eine eigentliche, nirgends entartete holomorphe Abbildung von M^* in X mit $\mu(M^*) = M$.*

1) *Bezeichnet N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von M, so enthält $\mu^{-1}(N)$ keine ganze zusammenhängende Komponente des Raumes M^*; die Menge $M^* - \mu^{-1}(N) = \mathring{M}^*$ wird durch μ umkehrbar holomorph auf die komplexe Mannigfaltigkeit $M - N = \mathring{M}$ abgebildet*[17]).

Die nichtgewöhnlichen Punkte N einer in einer komplexen Mannigfaltigkeit X analytischen Menge M bilden selbst wieder eine analytische Menge in X, deren Dimension in jedem Punkte $x \in N$ kleiner als die Dimension von M in x ist (vgl. [*15*], Exp. IX). Da die Urbilder analytischer Mengen bezüglich holomorpher Abbildungen wieder analytische Mengen sind, so folgt wegen der in 1.6 gemachten Bemerkung aus § 1:

Der komplexe Raum M^* wird durch die Menge $\mu^{-1}(N)$ nirgends zerlegt.

2. Wir beweisen in diesem Abschnitt die Einzigkeit komplexer Überlagerungsräume.

Satz 1. *Eine in einer komplexen Mannigfaltigkeit X analytische Menge M besitzt höchstens einen komplexen Überlagerungsraum.* [*Das heißt: sind (M_1^*, μ_1)*

[16]) Natürlich ist hier der Begriff der komplex-analytischen Struktur im Sinne von Def. 7 zu verstehen. In [*33*] ist der Begriff des komplexen Raumes so gefaßt, daß eine analytische Menge in X stets in natürlicher Weise als komplexer Unterraum von X angesehen werden kann.

[1]) Bereits K. STEIN [*36*] hat eine begriffliche Charakterisierung des komplexen Überlagerungsraumes gegeben. Die hier den Überlagerungen zugrunde gelegte Definition stimmt nicht mit der STEINschen Definition überein.

und (M_2^*, μ_2) zwei komplexe Überlagerungsräume von M, so gibt es eine umkehrbar holomorphe Abbildung τ von M_1^* auf M_2^*, so daß gilt: $\mu_1 = \mu_2 \circ \tau$.]

Beweis. Seien (M_1^*, μ_1) und (M_2^*, μ_2) zwei komplexe Überlagerungsräume von M. Da μ_1 bzw. μ_2 den Raum $\overset{\circ}{M}{}_1^*$ bzw. $\overset{\circ}{M}{}_2^*$ umkehrbar holomorph auf $\overset{\circ}{M}$ abbildet, wird durch $\overset{\circ}{\tau}(m_1) = \mu_2^{-1} \circ \mu_1(m_1)$, $m_1 \in \overset{\circ}{M}{}_1^*$, eine umkehrbar holomorphe Abbildung von $\overset{\circ}{M}{}_1^*$ auf $\overset{\circ}{M}{}_2^*$ definiert. Diese Abbildung $\overset{\circ}{\tau}$ werde nun zu einer stetigen Abbildung τ von M_1^* in M_2^* fortgesetzt! Ist $m_1 \in M_1^* - \overset{\circ}{M}{}_1^*$ irgendein Punkt, so sei $m_1^{(\nu)}$ eine gegen m_1 konvergierende Folge aus $\overset{\circ}{M}{}_1^*$. Die Bildfolge $\overset{\circ}{\tau}(m_1^{(\nu)})$ hat sicher einen über $\mu_1(m_1) \in M$ liegenden Häufungspunkt $m_2 \in M_2^*$, da $\mu_1(m_1^{(\nu)})$ gegen $\mu_1(m_1)$ konvergiert und μ_2 eine eigentliche Abbildung ist. Wir behaupten, daß die Folge $\overset{\circ}{\tau}(m_1^{(\nu)})$ sogar gegen m_2 konvergiert.

Um das einzusehen, ordnen wir jedem Punkt $m_2^{(j)} \in \mu_2^{-1}(\mu_1(m_1))$ (es gibt nur endlich viele solche Punkte!) eine Umgebung $U_j(m_2^{(j)}) \subset M_2^*$ zu, derart, daß U_{j_1} und U_{j_2} für $j_1 \neq j_2$ punktfremd sind. Sind $\overset{\circ}{V}_j = \overset{\circ}{\tau}{}^{-1}(U_j)$ die Urbilder der U_j in $\overset{\circ}{M}{}_1^*$ bezüglich $\overset{\circ}{\tau}$, so gibt es sicher eine zusammenhängende Umgebung $V(m_1)$, derart, daß $\overset{\circ}{V} = V(m_1) \cap \overset{\circ}{M}{}_1^*$ in der offenen Menge $\bigcup_j \overset{\circ}{V}_j$ enthalten ist [anderenfalls gäbe es nämlich eine gegen m_1 konvergierende Punktfolge $\tilde{m}_1^{(\nu)} \in \overset{\circ}{M}{}_1^*$, deren Bildfolge $\overset{\circ}{\tau}(\tilde{m}_1^{(\nu)})$ sich nicht gegen einen über $\mu_1(m_1)$ liegenden Punkt von M_2^* häufen würde]. Da die Menge $M_1^* - \overset{\circ}{M}{}_1^*$ den Raum M_1 nirgends zerlegt, ist mit V auch die Menge $\overset{\circ}{V}$ zusammenhängend. Alsdann wird $\overset{\circ}{V}$ vermöge $\overset{\circ}{\tau}$ in eine bestimmte Menge U_{j_0} abgebildet. Das bedeutet aber, daß $\overset{\circ}{\tau}(m_1^{(\nu)})$ nur den Punkt $m_2^{(j_0)}$ als Häufungspunkt haben kann, denn dies ist der einzige Punkt aus $\mu_2^{-1}(\mu_1(m_1))$, der in U_{j_0} liegt. Mithin hat die Folge $\overset{\circ}{\tau}(m_1^{(\nu)})$ genau einen Häufungspunkt; da aber andererseits jede ihrer Teilfolgen einen Häufungspunkt hat, konvergiert $\overset{\circ}{\tau}(m_1^{(\nu)})$ gegen $m_2 = m_2^{(j_0)}$.

Wir setzen nun: $\tau(m_1) = \lim_{\nu \to \infty} \tau(m_1^{(\nu)}) = m_2$. Diese Definition ist auf Grund des soeben bewiesenen unabhängig von der Wahl der Folge $m_1^{(\nu)}$; also ist τ eindeutig definiert und offensichtlich die stetige Fortsetzung von $\overset{\circ}{\tau}$ auf M_1^*. Ebenso kann man $\overset{\circ}{\tau}{}^{-1}$ stetig auf M_2^* fortsetzen. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Fortsetzung die Umkehrung von τ; daher ist τ eine topologische Abbildung von M_1^* auf M_2^*. Nach Definition gilt: $\mu_1 = \mu_2 \circ \tau$.

Wir haben noch zu zeigen, daß τ und τ^{-1} holomorphe Abbildungen sind. Es genügt, diesen Beweis für τ zu führen. Laut Definition ist τ genau dann holomorph, wenn folgendes gilt: Ist f irgendeine in einer offenen Menge $U \subset M_2^*$ holomorphe Funktion, so ist $f_1 = f \circ \tau$ in $W = \tau^{-1}(U)$ holomorph. Sicher ist die Funktion f_1 in $\overset{\circ}{W} = W \cap \overset{\circ}{M}{}_1^*$ holomorph, da dort gilt: $f_1 = f \circ \overset{\circ}{\tau}$ und $\overset{\circ}{\tau}$ eine holomorphe Abbildung ist. Nun ist $W - \overset{\circ}{W} = \mu_1^{-1}(N) \cap W$ eine analytische Menge in W, deren Dimension in jedem ihrer Punkte kleiner ist als die Dimension von W. Da f_1 in ganz W stetig ist, ergibt sich die Holomorphie von f_1 in W aus dem folgenden . .

Satz von RIEMANN: *Eine in einem komplexen Raum stetige, außerhalb einer dünnen Menge erster Ordnung holomorphe Funktion ist schlechthin holomorph*[18]).

3. Die Existenz komplexer Überlagerungsräume zu analytischen Mengen in komplexen Mannigfaltigkeiten war bereits — wenigstens im Prinzip — WEIERSTRASS bekannt[19]). In der Sprache der modernen Mathematik findet sich ein Beweis in den hektographierten Seminarberichten von CARTAN ([*13*], Exp. XIII—XIV, [*15*], Exp. VI—IX). Die Darstellung von CARTAN zeigt, daß die Abbildung μ genau dann eine topologische Abbildung von M^* auf M ist, wenn M *lokal-irreduzibel* ist. Ein Punkt $x \in M$ besitzt nämlich genau so viele verschiedene Urbilder in M^* wie M in x irreduzible Komponenten hat[20]). Die Konstruktion von CARTAN führt weiter genau dann zu einem zusammenhängenden komplexen Raum M^*, wenn die analytische Menge M irreduzibel in X ist.

Somit gilt in Verbindung mit dem Einzigkeitssatz:

Satz 2. *Ist M eine analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit X, so besitzt M (bis auf analytische Isomorphie) genau einen komplexen Überlagerungsraum (M^*, μ). Es gelten folgende Aussagen:*

1) *Ein Punkt $x \in M$ hat genau dann k verschiedene Urbilder in M^*, wenn M in x in k irreduzible Komponenten zerfällt.*

2) *Der Raum M^* wird dann und nur dann durch μ topologisch auf M abgebildet, wenn M lokal-irreduzibel ist.*

3) *Der Raum M^* ist genau dann zusammenhängend, wenn M eine irreduzible analytische Menge in X ist.*

Aus diesem Satz folgt insbesondere:

Jede in einer komplexen Mannigfaltigkeit X lokal-irreduzible analytische Menge M besitzt eine natürliche komplex-analytische Struktur und ist somit ein komplexer Raum.

4. Wir geben in diesem Abschnitt ein Beispiel eines komplexen Raumes an, welches lehrt, daß gewisse Aussagen der komplexen Analysis, die für

---

[18]) Zum Beweise siehe [*31*], p. 186ff. sowie [*33*], p. 417.

[19]) Vgl. hierzu [*42*], p. 100.

[20]) Eine in einer komplexen Mannigfaltigkeit X analytische Menge M heißt *reduzibel* in X, wenn es zwei nicht leere, von M verschiedene, in X analytische Mengen M' und M'' gibt, deren Vereinigung M ist. Andernfalls heißt M *irreduzibel* in X.

Die in X analytische Menge M heißt *irreduzibel im Punkte $x \in X$*, wenn es beliebig kleine Umgebungen $U(x)$ gibt, derart, daß $M \cap U(x)$ irreduzibel in $U(x)$ ist.

Über die lokale Zerlegung einer analytischen Menge M gilt: *Es gibt zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U, derart, daß $M \cap U$ sich darstellt als Vereinigung von endlich vielen in U irreduziblen analytischen Mengen M_σ, $\sigma = 1, \ldots, s$, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Es gibt kein s_0, derart, daß M_{s_0} in der Menge $\bigcup_{\sigma \neq s_0} M_\sigma$ enthalten ist.*

b) *Jede Menge M_σ enthält den Punkt x und ist in x irreduzibel.*

Die Mengen M_σ, $\sigma = 1, \ldots, s$, heißen die *irreduziblen Komponenten* von M in x; ihre Anzahl s ist unabhängig von der Wahl der Umgebung U.

Die in X analytische Menge M heißt *lokal-irreduzibel*, wenn sie in jedem ihrer Punkte irreduzibel ist.

den C^n und allgemein für komplexe Mannigfaltigkeiten richtig sind, in komplexen Räumen ihre Allgemeingültigkeit verlieren.

Es seien $C^2_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $k \geqq 2$, k Exemplare des 2-dimensionalen komplexen Zahlenraumes der Veränderlichen $z_\varkappa, w_\varkappa$. Im kartesischen Produkt $C^{2k} = \bigtimes_{\varkappa=1}^{k} C^2_\varkappa$ werde die analytische Menge

$$Y: \quad \left\{ \frac{z_1}{w_1} = \cdots = \frac{z_k}{w_k} \right\}$$

betrachtet[21]). Alle vom Nullpunkt $O \in C^{2k}$ verschiedenen Punkte $y \in Y$ sind gewöhnliche Punkte von Y, da man das angeschriebene Gleichungssystem in der Umgebung eines jeden solchen Punktes immer nach $(k-1)$ Variablen auflösen kann. Daraus folgt insbesondere, daß Y in jedem Punkt $y \neq O$ die Dimension $k+1$ hat; das gilt alsdann auch noch für den Nullpunkt O selbst, da er Häufungspunkt von gewöhnlichen Punkten ist (vgl. etwa [35], p. 282). Mithin ist Y eine *rein $(k+1)$-dimensionale analytische Menge im* C^{2k}; wir schreiben daher auch: $Y = Y^{k+1}$.

Die Menge Y^{k+1} wird durch die k-dimensionalen analytischen Ebenen

$$E(s): \quad \left\{ \frac{z_1}{w_1} = \cdots = \frac{z_k}{w_k} = s \right\}$$

vollständig überdeckt, wenn s die Zahlen einer RIEMANNschen Zahlenkugel P^1 durchläuft: $Y^{k+1} = \{E(s), s \in P^1\}$. Zwei Ebenen $E(s_1)$ und $E(s_2)$, $s_1 \neq s_2$, schneiden sich genau im Punkte $O \in C^{2k}$.

Wir behaupten nun: *Y ist im Nullpunkt O irreduzibel.*

Wir zeigen dazu, daß in keiner Kugel K um O die Menge $Y \cap K$ in zwei nicht leere, von $Y \cap K$ verschiedene analytische Mengen Y_1, Y_2 zerfallen kann. Könnte man nämlich für eine gewisse Kugel K die Menge $Y \cap K$ als Vereinigung zweier solcher, dann notwendig rein $(k+1)$-dimensionaler analytischer Mengen Y_1 und Y_2 darstellen, so würden Y_1 und Y_2 mit eventueller Ausnahme von O nur gewöhnliche Punkte besitzen. Daher könnte $Y \cap (K - O)$ nicht zusammenhängend sein. Das ist aber der Fall, denn offensichtlich ist die Menge $\{E(s) \cap (K - O), s \in P^1\}$, die mit $Y \cap (K - O)$ übereinstimmt, eine zusammenhängende Punktmenge. Y^{k+1} ist somit eine lokal-irreduzible, rein $(k+1)$-dimensionale analytische Menge im C^{2k} und besitzt folglich nach § 2.3 eine natürliche komplex-analytische Struktur. Wir können daher Y^{k+1} als einen $(k+1)$-dimensionalen komplexen Raum auffassen; offensichtlich ist Y^{k+1} zusammenhängend.

5. Wir bezeichnen im folgenden den Nullpunkt des C^{2k} mit y_0 und zeigen, daß $y_0 \in Y^{k+1}$ ein nicht-uniformisierbarer Punkt von Y^{k+1} ist. Zu dem Zwecke

[21]) Werden die Koordinaten des C^{2k} als homogene Koordinaten des $(2k-1)$-dimensionalen projektiven Raumes P^{2k-1} gedeutet, so geht der Kegel Y in eine k-dimensionale algebraische Menge des P^{2k-1} über, die in der algebraischen Geometrie seit langem bekannt ist und dort als Segremannigfaltigkeit $S_{k-1,1}$ bezeichnet wird. Y selbst würde man am besten Segrekegel nennen. Vgl. dazu etwa BURAU, W.: Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. Collectanea Math. **1950–1953.**

weisen wir nach, daß in einer Umgebung von y_0 nicht mehr alle Eigenschaften gelten, die von der komplexen Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten her bekannt sind. Für komplexe Mannigfaltigkeiten gilt z.B. der folgende Satz (vgl. [37]):

Sind M_1 und M_2 zwei rein d_1- bzw. d_2-dimensionale analytische Mengen in einer rein n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X, so ist $M_1 \cap M_2$ leer oder eine mindestens (d_1+d_2-n)-dimensionale analytische Menge in X.

Für den hier konstruierten komplexen Raum verliert dieser Satz aber schon seine Gültigkeit im Falle $d_1=d_2=n-1$. Es gilt nämlich, wenn man $n=k+1$ setzt (man beachte $n \geqq 3$):

Satz 3. *Die im rein n-dimensionalen komplexen Raum Y^n rein $(n-1)$-dimensionalen analytischen Mengen $E(s_1)$, $E(s_2)$, $s_1 \neq s_2$, schneiden sich nur im Punkte y_0, also in einer nicht leeren analytischen Menge, deren Dimension kleiner als $n-2$ ist.*

Für komplexe Mannigfaltigkeiten gilt weiter (vgl. [35], p. 276):

Jede in einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge ist lokal stets das Nullstellengebilde genau einer holomorphen Funktion.

Auch dieser Satz wird im Raum Y^n falsch; vielmehr läßt sich zeigen:

Satz 4. *Die in Y^n rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $E(s)$ ist in einer Umgebung von y_0 nicht als simultanes Nullstellengebilde von weniger als $(n-1)$ lokal-holomorphen Funktionen darstellbar.*

In der Tat: Ließe sich nämlich die Ebene $E(s)$ in einer Umgebung $U \subset Y^n$ des Punktes y_0 als simultanes Nullstellengebilde von weniger als $(n-1)$ in U holomorphen Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ darstellen, so würden die Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ auf jeder von $E(s)$ verschiedenen Ebene $E(s')$ in $U \cap E(s')$ nur im Nullpunkt gemeinsam verschwinden. Das ist aber nicht möglich, denn aus dem oben für komplexe Mannigfaltigkeiten angegebenen Satz ergibt sich durch einen einfachen Induktionsschluß, wenn man beachtet, daß $E(s')$ eine rein $(n-1)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, daß die analytische Menge

$$\{g_1=0, g_2=0, \ldots, g_m=0\}$$

in $U \cap E(s')$ mindestens $(n-m-1)$-dimensional ist. Wegen $m<n-1$ haben also die $g_1, \ldots, g_m$ noch weitere gemeinsame Nullstellen in $U \cap E(s')$.

Die Aussage von Satz 4 ist besonders überraschend, da sich andererseits zeigen läßt:

Ist X ein n-dimensionaler komplexer Raum, so läßt sich jede analytische Menge in X lokal stets als simultanes Nullstellengebilde von höchstens n lokal-holomorphen Funktionen darstellen[22]).

Weiter zeigt der Raum Y^n bezüglich meromorpher Funktionen ein anderes Verhalten als komplexe Mannigfaltigkeiten. Für rein n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten X gilt bekanntlich:

[22]) Vgl. dazu [20], Satz 1. Mit dem dort angegebenen Verfahren läßt sich diese Aussage beweisen.

Die außerwesentlichen Singularitäten zweiter Art (Unbestimmtheitsstellen) einer in X meromorphen Funktion bilden eine leere oder rein $(n-2)$-dimensionale analytische Menge in X[23]).

Für den Raum Y^n gilt dagegen:

Satz 5. *Es gibt eine in Y^n meromorphe Funktion $h(y)$, die als einzige Unbestimmtheitsstelle den Punkt y_0 hat.*

Man hat nur zu setzen: $h(y) = \frac{z_1}{w_1} = \cdots = \frac{z_k}{w_k} = s$.

6. Der Raum Y^n läßt sich als endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung des C^n auffassen. Um das einzusehen, definieren wir zunächst eine holomorphe Abbildung Φ von Y^n auf den Raum C^n, $n = k+1$, der Veränderlichen $v_0, v_1, \ldots, v_k$, indem wir setzen:

$$\Phi: \begin{cases} v_0 = z_1 + \cdots + z_k, \\ v_1 = w_1 + a_1 z_1, \\ \vdots \\ v_k = w_k + a_k z_k, \end{cases} \qquad (z_1, w_1, \ldots, z_k, w_k) \in Y^n;$$

dabei seien $a_1, \ldots, a_k$ fest gewählte, paarweise voneinander verschiedene komplexe Zahlen vom Betrage 1.

Offensichtlich hat der Nullpunkt $O \in C^n$ nur den Punkt $y_0 \in Y^n$ als Φ-Urbild. Durch Φ wird ferner, wie man sofort nachrechnet, die $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene $E(s) < Y^n$ linear auf die $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene

$$v_0 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + a_\varkappa s) - s \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varkappa}}^{k} (1 + a_\nu s) = 0$$

im C^n abgebildet. Daraus folgt, daß jeder Punkt $\mathfrak{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ des C^n in jeder Ebene $E(s)$ höchstens einen Urbildpunkt besitzt. Die Parameter s der Ebenen $E(s)$, in denen ein solcher Urbildpunkt liegt, müssen notwendig das Polynom in s: $P(s; \mathfrak{v}) = v_0 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + a_\varkappa s) - s \cdot \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa \cdot \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varkappa}}^{k} (1 + a_\nu s)$ annullieren, oder es muß $s = \infty$ sein. Da $P(s; \mathfrak{v})$ nur für $\mathfrak{v} = 0$ identisch verschwindet und im übrigen bezüglich s stets höchstens vom Grade k ist, besitzt also jeder Punkt $\mathfrak{v} \in C^n$ höchstens k verschiedene Urbilder in Y^n; die Abbildung Φ ist daher eine nirgends entartete Abbildung. Es folgt auch: Φ ist eine eigentliche Abbildung von Y^n auf C^n.

Es gibt Punkte $\mathfrak{v} \in C^n$, derart, daß das Polynom $P(s; \mathfrak{v})$ genau k verschiedene Nullstellen hat, denn von den $(k+1)$ Koeffizienten von $P(s; \mathfrak{v})$ können k beliebig gewählt werden, da für $\mathfrak{v}$ alle Punkte des C^n zulässig sind. Gewisse Punkte des C^n besitzen also genau k verschiedene Urbilder in Y^n.

Nach diesen Bemerkungen ergibt sich leicht:

Satz 6. *Das Tripel (Y^n, Φ, C^n) ist eine $(n-1)$-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung des C^n.*

[23]) Vgl. hierzu [2], p. 61, sowie [31], p. 182.

Beweis. Die Bedingung 0) von Def. 1 ist bereits verifiziert. Um Bedingung 1) zu bestätigen, betrachten wir in der komplexen Mannigfaltigkeit $Y^n - y_0$ die Nullstellenmenge A' der Funktionaldeterminante der Abbildung Φ. A' ist eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in $Y^n - y_0$. Da Φ eine nirgends entartete eigentliche holomorphe Abbildung von $Y^n - y_0$ auf $C^n - O$ ist, wird A' nach einem für komplexe Räume geltenden Abbildungssatz (vgl. [33], [34]) durch Φ auf eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge A^* in $C^n - O$ abgebildet. A^* ist nach einem Fortsetzungssatz über analytische Mengen (vgl. [40], [35]) zu einer im C^n analytischen Menge A fortsetzbar, wir dürfen $O \in A$ annehmen. Die Menge $\Phi^{-1}(A)$ ist eine analytische Menge in Y^n und zerlegt daher Y^n nirgends. Da $\Phi^{-1}(A)$ die Menge $A' \cup y_0$ umfaßt, ist Φ in $Y^n - \Phi^{-1}(A)$ lokal-topologisch. Damit ist aber Bedingung 1) als erfüllt nachgewiesen, w. z. b. w.

7. Der in dem $(2n-2)$-dimensionalen komplexen Zahlenraum C^{2n-2} holomorph eingebettete n-dimensionale komplexe Raum Y^n hat weiter die folgende bemerkenswerte Eigenschaft:

Satz 7. *Es gibt keine Umgebung $U \subset Y^n$ des Punktes $y_0 \in Y^n$, die umkehrbar holomorph auf eine in einem Gebiet $G \subset C^r$, $r < 2n-2$ lokal-irreduzible analytische Menge abbildbar ist.*

Andernfalls hätten nämlich zwei verschiedene Ebenen $E(s_1)$ und $E(s_2)$ eine mindestens eindimensionale analytische Menge miteinander gemeinsam[24]).

Der n-dimensionale komplexe Raum Y^n kann also sicher nicht dadurch erzeugt werden, daß man eine in einem Zahlenraum C^r mit $r < 2n-2$ liegende lokal-irreduzible analytische Menge mit der natürlichen komplex-analytischen Struktur versieht. Jedoch gibt es bereits im C^{n+1} analytische Mengen, die Y^n als Überlagerungsraum haben.

Satz 8. *Es gibt im $(n+1)$-dimensionalen komplexen Zahlenraum C^{n+1} eine analytische Menge M und eine holomorphe Abbildung μ von Y^n auf M, derart, daß (Y^n, μ) der komplexe Überlagerungsraum von M ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{v}^* \in C^n$ ein Punkt, über dem kein Verzweigungspunkt der analytisch-verzweigten Überlagerung (Y^n, Φ, C^n) liegt. Sei f eine holomorphe Funktion auf Y^n, die in den über $\mathfrak{v}^*$ liegenden Punkten von Y^n jeweils verschiedene Werte hat (man wähle etwa für f ein lineares homogenes Polynom in den $z_1, w_1, z_2, w_2, \ldots, z_k, w_k$). Die Funktion f annulliert nach bekannten Sätzen[25]) ein irreduzibles Pseudopolynom

$$\tilde{\omega}(v; v_0, v_1, \ldots, v_k) \equiv v^k + c_1(v_0, v_1, \ldots, v_k)\, v^{k-1} + \cdots + c_k(v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Die Diskriminantenmenge D von $\tilde{\omega}$ ist eine den Nullpunkt des C^n umfassende analytische Menge und läßt sich als Nullstellengebilde einer holomorphen Funktion $h(v_0, \ldots, v_k)$ darstellen. Wir betrachten alsdann auf Y^n

[24]) Man muß benutzen, daß die Bilder der Ebenen $E(s_1)$ und $E(s_2)$ rein $(n-1)$-dimensionale analytische Mengen in G sind. Das aber folgt aus einem in [33], [34] bewiesenen Projektionssatz.

[25]) Zum Begriff des Pseudopolynoms sowie der Diskriminante vgl. [31].

das Produkt g der Funktionen f und $h \circ \Phi$. Die Funktion g ist ebenfalls holomorph auf Y^n und zwar die Nullstelle des irreduziblen Pseudopolynoms

$$\omega(v; v_0, \ldots, v_k) \equiv v^k + c_1(v_0, \ldots, v_k) \cdot h(v_0, \ldots, v_k)\, v^{k-1} + \cdots$$
$$\cdots + c_k(v_0, \ldots, v_k) \cdot h(v_0, \ldots, v_k)^k.$$

Die Pseudopolynome $\tilde{\omega}$ und ω haben offenbar dieselbe Diskriminantenmenge D. Bezeichnet nun M die im Raum C^{n+1} der Veränderlichen $v, v_0, v_1, \ldots, v_k$ gelegene Nullstellenmenge des Pseudopolynoms ω, so besitzt M sicher keine gewöhnlichen Punkte in der Menge $\{v\} \times D$. Denn alle partiellen Ableitungen von ω verschwinden dort, da die Koeffizienten von ω sämtlich in D verschwinden, und zwar das konstante Glied sogar in mindestens k-ter Ordnung ($k \geqq 2$). Da andererseits jeder Punkt von M, der nicht zu $\{v\} \times D$ gehört, sicher ein gewöhnlicher Punkt von M ist, so besteht die Menge N der nichtgewöhnlichen Punkte von M also genau aus der Menge $M \cap (\{v\} \times D)$.

Wir betrachten nun die holomorphe Abbildung $\mu = g \times \Phi$ von Y^n in den C^{n+1}. Dieselbe bildet Y^n auf M ab und ist offensichtlich nirgends entartet und eigentlich. Nach dem Vorstehenden gilt: $\mu^{-1}(N) = \Phi^{-1}(D)$. Da g in allen Punkten von Y^n, die über einem Punkt $\mathfrak{v} \notin D$ liegen, paarweise verschiedene Werte besitzt, wird also durch μ die Menge $Y^n - \Phi^{-1}(D)$ eineindeutig auf die Menge der gewöhnlichen Punkte von M abgebildet. Da $Y^n - \Phi^{-1}(D)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist [es gilt $y_0 \in \Phi^{-1}(D)$], so ist $\mu: Y^n - \Phi^{-1}(D) \to M - N$ nach einem bekannten Satze[26]) holomorph umkehrbar. Damit ist alles bewiesen.

Wir können die Menge $M \subset C^{n+1}$ noch näher beschreiben:

Satz 9. *Die im C^{n+1} analytische Menge M ist irreduzibel und n-dimensional. M ist im Nullpunkt irreduzibel, jedoch gibt es in beliebiger Nähe des Nullpunktes Punkte von M, in denen M reduzibel ist*[27]).

Der Beweis ist einfach. Da Y^n ein zusammenhängender n-dimensionaler komplexer Raum ist, so ist M wegen Satz 2 irreduzibel und n-dimensional. Da über $O \in M$ nur der Punkt $y_0 \in Y^n$ liegt, folgt ebenfalls aus Satz 2, daß M in O irreduzibel ist. Es muß aber in beliebiger Nähe von O Punkte von M geben, in denen M reduzibel ist, da sonst nach Satz 2 die Abbildung μ eine Umgebung U von $y_0 \in Y^n$ umkehrbar holomorph auf eine Umgebung $V(O) \in M$ abbilden würde, was nach Satz 7 nicht möglich ist.

Der Menge M läßt sich auf Grund von Satz 9 in keiner Umgebung $V(O) \subset M$ eine komplex-analytische Struktur aufprägen, derart, daß die Injektion $\iota: M \to C^{n+1}$ eine holomorphe Abbildung ist. Denn wäre das möglich, so müßte $\iota^{-1}(N)$, wo N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von M ist, eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge im komplexen Raum M sein, die M alsdann lokal nicht zerlegen könnte. Nun ist aber M in Punkten $\mathfrak{v}'$,

[26]) Nach [31], p. 149, sind eineindeutige holomorphe Abbildungen gleichdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten aufeinander holomorph umkehrbar.

[2]) Es gibt bereits im C^3 zweidimensionale analytische Mengen, die im Nullpunkt O irreduzibel, jedoch in keiner Umgebung von O lokal-irreduzibel sind. Das obige Beispiel gilt dagegen nur für $n \geqq 3$.

die beliebig nahe bei O gewählt werden können, reduzibel; in der Umgebung eines jeden solchen Punktes $\mathfrak{v}'$ zerfällt also M in mindestens zwei irreduzible Komponenten M_1 und M_2. Da offensichtlich $M_1 - N$ und $M_2 - N$ disjunkt sind, so zerlegt also N den Raum M in jeder Umgebung von $\mathfrak{v}'$.

§ 3. RIEMANNsche Gebiete

1. Bereits im Jahre 1932 führten Untersuchungen von CARTAN und THULLEN zu der Einsicht, daß man in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen neben den schlichten Gebieten im C^n zugleich auch nichtschlichte Gebiete über dem C^n betrachten muß (vgl. [39], p. 76 sowie [9], [10]). Im Laufe der Zeit sind für diese sog. RIEMANNschen Gebiete verschiedene Definitionen angegeben worden, die jedoch sämtlich die Verzweigungspunkte unberücksichtigt lassen. Wir werden in diesem Paragraphen verzweigte RIEMANNsche Gebiete als spezielle komplexe Räume definieren, die in bestimmter Art dem C^n überlagert sind.

Def. 16 (*RIEMANNsches Gebiet*). *Ein Paar* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt ein* RIEMANNsches Gebiet *über dem* C^n, *wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

0) G *ist ein* HAUSDORFFscher Raum *und* Φ *eine Abbildung von* G *in den* C^n.

1) *Zu jedem Punkt* $x \in G$ *gibt es Umgebungen* $U(x) \subset G$, $V(\Phi(x)) \subset C^n$, *so daß* (U, Φ, V) *eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung ist.*

Aus 1) folgt sofort, daß Φ eine stetige, nirgends entartete Abbildung von G in den C^n ist. Ferner wird G durch 1) in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen. G kann deshalb als komplexer Raum aufgefaßt werden; die Abbildung $\Phi: G \to C^n$ ist holomorph.

Def. 17 (*Unverzweigtes* RIEMANNsches Gebiet). *Ein* RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt unverzweigt, wenn* Φ *eine lokal-topologische Abbildung ist.*

Für gewisse weitere Überlegungen benötigen wir den Begriff des (erreichbaren) Randpunktes.

Def. 18 (*Randpunkt*)[28]. *Ein (erreichbarer) Randpunkt eines* RIEMANNschen Gebietes $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *ist ein Filter*[29] r *von offenen, zusammenhängenden Mengen* $U \subset G$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1) r *hat in* G *keinen Häufungspunkt;*

2) *der Bildfilter* $\{\Phi(U), U \in r\}$ *konvergiert gegen einen Punkt* $\mathfrak{z}_0 \in C^n$;

3) *ist* V *eine Umgebung von* $\mathfrak{z}_0$, *so enthält* r *genau eine zusammenhängende Komponente von* $\Phi^{-1}(V)$. *Alle Mengen* $U \in r$ *werden auf diese Weise erzeugt.*

Die Menge aller (erreichbaren) Randpunkte von $\mathfrak{G}$ heißt der *Rand* ∂G von $\mathfrak{G}$. Die Abbildung Φ wird durch die Setzung $\breve{\Phi}(r) = \mathfrak{z}_0$, $\breve{\Phi}(x) = \Phi(x)$ für $r \in \partial G$, $x \in G$ zu einer Abbildung $\breve{\Phi}$ von $\breve{G} = G \cup \partial G$ in den C^n fortgesetzt. Wir führen in $\breve{G}$ eine Topologie ein, indem wir den Randpunkten $r_0 \in \partial G$

[28]) Eine äquivalente Definition des Randpunktes findet sich in [2], p. 13.

[29]) Unter einem *Filter* $\mathfrak{F}$ auf einer nichtleeren Menge M verstehen wir ein nichtleeres Mengensystem nichtleerer Mengen, derart, daß zu zwei Mengen $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ stets eine Menge $N_3 \in \mathfrak{F}$ existiert, die in $N_1 \cap N_2$ enthalten ist.

Umgebungen zuordnen. Es sei etwa U_0 eine Menge aus r_0. Unter einer Umgebung $V(r_0)$ verstehen wir dann die Vereinigung von U_0 mit den Filtern $r \in \partial G$, die wenigstens eine Menge $U \subset U_0$ enthalten.

Offenbar wird $\breve{G}$ durch diese Topologisierung zu einem HAUSDORFFschen Raum; $\breve{\Phi}$ ist eine stetige Abbildung von $\breve{G}$ in den C^n.

Wir merken noch an:

Zu jedem Punkt $r \in \partial G$ gibt es eine Kurve $\{x(t), 0 \leq t \leq 1\}$, $x(1) = r$, in $\breve{G}$, die für $0 \leq t < 1$ in G verläuft.

Ist umgekehrt $\{x(t), 0 \leq t < 1\}$ eine Kurve in G und läßt sich die Abbildung $\Phi \circ x(t)$ zu einer stetigen Abbildung von $0 \leq t \leq 1$ in den C^n fortsetzen, so kann man in $\breve{G}$ auch $\{x(t), 0 \leq t < 1\}$ in eindeutiger Weise zu einer Kurve $\{x(t), 0 \leq t \leq 1\}$ fortsetzen. — Der Beweis beider Aussagen liegt auf der Hand.

2. Die RIEMANNschen Gebiete über dem C^n, $n \geq 2$, bilden eine zu umfangreiche Klasse von komplexen Räumen, als daß sich in ihnen im allgemeinen eine inhaltsvolle Funktionentheorie entwickeln ließe. Dementsprechend ist die Menge der analytischen Gebilde holomorpher Funktionen auch wesentlich kleiner als die Klasse der RIEMANNschen Gebiete. Es empfiehlt sich deshalb, alle funktionentheoretischen Untersuchungen auf die Existenzgebiete holomorpher Funktionen, die sog. Holomorphiegebiete, zu beschränken. Um diesen Begriff zu präzisieren, geben wir zunächst folgende Definitionen:

Def. 19 *(Enthaltensein).* *Ein* RIEMANNsches *Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ist in einem* RIEMANNschen *Gebiet $\mathfrak{G}' = (G', \Phi')$ enthalten, wenn es eine spurpunkttreue, stetige Abbildung τ von G in G' gibt.*

Def. 20 *(Äquivalenz).* *Zwei* RIEMANNsche *Gebiete $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$, $\mathfrak{G}' = (G', \Phi')$ heißen äquivalent (in Zeichen $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$), wenn sich G topologisch und spurpunkttreu auf G' abbilden läßt.*

Def. 21 *(Fortsetzung).* *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein* RIEMANNsches *Gebiet, das vermöge einer stetigen, spurpunkttreuen Abbildung $\tau: G \to G'$ in einem* RIEMANNschen *Gebiet $\mathfrak{G}' = (G', \Phi')$ enthalten ist. Ist dann $f(x)$ eine in G und $f'(x')$ eine in G' holomorphe Funktion, so heißt $f'(x')$ die holomorphe Fortsetzung von $f(x)$ in $\mathfrak{G}'$, wenn in G gilt: $f(x) = f' \circ \tau(x)$.*

Wir verwenden nun diese Definitionen, um die Holomorphiegebiete einzuführen:

Def. 22 *(Holomorphiegebiet).* *Ein* RIEMANNsches *Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ heißt ein Holomorphiegebiet, wenn es eine in G holomorphe Funktion f gibt, die sich in kein $\mathfrak{G}$ umfassendes, zu $\mathfrak{G}$ nicht äquivalentes* RIEMANNsches *Gebiet fortsetzen läßt.*

Eine spezielle Klasse von Holomorphiegebieten bilden die holomorph-konvexen RIEMANNschen Gebiete. Der hier auftretende Begriff der Holomorphiekonvexität läßt sich in beliebigen komplexen Räumen X einführen. Wir definieren dazu zunächst die holomorph-konvexe Hülle einer beliebigen Teilmenge von X (vgl. hierzu etwa auch [*14*]):

Def. 23 *(Holomorph-konvexe Hülle). Unter der holomorph-konvexen Hülle* $\hat{M}$ *einer Teilmenge* M *eines komplexen Raumes* X *versteht man die Menge* $\{x \in X, |f(x)| \leq \sup |f(M)|\}$, *wobei* f *alle in* X *holomorphen Funktionen durchläuft.*

Offenbar ist $\hat{M}$ immer abgeschlossen. Wir definieren weiter:

Def. 24 *(Holomorphiekonvexität). Ein komplexer Raum heißt holomorph-konvex, wenn die holomorph-konvexe Hülle jeder kompakten Teilmenge von* X *kompakt ist.*

Ein RIEMANNsches *Gebiet* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt holomorph-konvex, wenn der komplexe Raum* G *holomorph-konvex ist.*

Es gilt nun:

Satz 10. *Jedes holomorph-konvexe* RIEMANNsche *Gebiet, dessen Verzweigungsverhalten lokal jeweils durch eine holomorphe Funktion repräsentiert werden kann, ist ein Holomorphiegebiet*[30]).

OKA zeigte 1953, daß die unverzweigten Holomorphiegebiete durch die Holomorphiekonvexität charakterisiert werden. Er bewies nämlich [*30*]:

Satz 11. *Ein unverzweigtes* RIEMANNsches *Gebiet über dem* C^n *ist dann und nur dann ein Holomorphiegebiet, wenn es holomorph-konvex ist.*

Spezialfälle dieses sehr tiefliegenden Resultates waren seit längerem bekannt. So bewies bereits 1932 THULLEN [*39*] die Richtigkeit von Satz 11 für schlichte Holomorphiegebiete. Bei der Wichtigkeit des Problems übertrugen BEHNKE und STEIN die Aussage des THULLENschen Satzes auf die sog. fastendlich-blättrigen RIEMANNschen Gebiete [*4*]. Um jedoch den Allgemeinfall zu lösen, mußten von OKA völlig andere Methoden herausgearbeitet werden.

3. Als entscheidend für die Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch lokale Eigenschaften (die Holomorphiekonvexität muß als globale Eigenschaft angesehen werden!), hat sich die Pseudokonvexität herausgestellt. Wir ziehen zur Definition spezielle Scharen analytischer Mengen heran (vgl. hierzu auch [*22*]):

Def. 25 *(Schar analytischer Mengen). Unter einer Schar eindimensionaler analytischer Mengen in einem* RIEMANNschen *Gebiet* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *wird eine nicht konstante, holomorphe Abbildung* $\sigma(w, t)$ *des Einheitskreises* $K: \{|w| \leq 1\}$ *in* $\breve{G}$ *verstanden, die noch stetig von einem reellen Parameter* t, $0 \leq t \leq 1$, *abhängt.*

Dabei sagen wir, $\sigma(w, t)$, $t = t_0$, bildet K holomorph in $\breve{G}$ ab, wenn σ stetig und die Abbildung $\breve{\Phi} \circ \sigma(w, t): K \to C^n$ in einer Umgebung von K holomorph ist. Wir setzen $\sigma(w, t) = \sigma_\varepsilon(w, t)$, wenn die Menge $\{\Phi \circ \sigma(w, t), |w| \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ in einer Hyperkugel vom Radius ε enthalten ist.

Def. 26 *(Ausgezeichnete Schar). Eine Schar* $\sigma(w, t)$ *eindimensionaler analytischer Mengen in einem* RIEMANNschen *Gebiet* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt aus-*

[30]) Ein Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus [*19*], Satz B, in Verbindung mit [*2*], Satz 37. Vgl. auch [*1*]. Am Schluß dieser Arbeit findet sich eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften holomorph-konvexer RIEMANNscher Gebiete.

gezeichnet, wenn $\sigma(w, t)$ *für* $w \in K$, $0 \leq t < 1$, *und für* $w \in \partial K$, $0 \leq t \leq 1$ *in* G *enthalten ist.*

Es läßt sich nun definieren:

Def. 27 *(Pseudokonvexes* RIEMANN*sches Gebiet). Ein* RIEMANN*sches Gebiet* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt pseudokonvex, wenn für jede in* $\mathfrak{G}$ *ausgezeichnete Schar eindimensionaler analytischer Mengen* $\sigma(w, t)$ *der Durchschnitt* $\{\sigma(w, t)\} \cap \partial G$ *leer ist.*

Def. 28 *(Pseudokonvexer Randpunkt). Ein Randpunkt* r *eines* RIEMANN*schen Gebietes* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt pseudokonvex, wenn es eine Umgebung* $U(r) \subset \overset{\circ}{G}$ *und ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, so daß jede in* $\mathfrak{G}$ *ausgezeichnete Schar analytischer Mengen* $\sigma_\varepsilon(w, t)$ *mit* $U(r) \cap \partial G$ *keinen Punkt gemeinsam hat.*

Offenbar bilden die pseudokonvexen Randpunkte eine offene Menge in ∂G. Ist $\mathfrak{G}$ pseudokonvex, so ist auch jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ pseudokonvex. Während aber die Pseudokonvexität selbst noch eine globale Eigenschaft ist, ist die Pseudokonvexität eines Randpunktes sicher rein lokaler Natur. OKA konnte nun zeigen [*30*]:

Satz 12. *Ein unverzweigtes* RIEMANN*sches Gebiet* $\mathfrak{G}$ *ist genau dann pseudokonvex, wenn jeder Randpunkt von* $\mathfrak{G}$ *pseudokonvex ist.*

Ferner ergab sich das sehr tiefliegende Resultat:

Satz 13. *Ein unverzweigtes* RIEMANN*sches Gebiet ist genau dann holomorphkonvex, wenn es pseudokonvex ist.*

Zusammen mit Satz 11 und Satz 12 folgt daraus:

Satz 14. *Ein unverzweigtes* RIEMANN*sches Gebiet* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann ein Holomorphiegebiet, wenn jeder Randpunkt von* $\mathfrak{G}$ *pseudokonvex ist.*

Es sei angemerkt, daß OKA diese Sätze nicht in der hier angegebenen Reihenfolge bewiesen hat. Er zeigte zunächst, daß jedes unverzweigte Holomorphiegebiet pseudokonvex ist und schloß erst dann, daß jedes unverzweigte pseudokonvexe RIEMANNsche Gebiet ein holomorph-konvexes Holomorphiegebiet ist.

4. Grundlegende Sätze der Funktionentheorie auf offenen RIEMANNschen Flächen gelten mutatis mutandis auch in unverzweigten Holomorphiegebieten. Der klassische Satz von MITTAG-LEFFLER sagt aus, daß man auf nicht-kompakten RIEMANNschen Flächen zu sinnvoll vorgegebenen Hauptteilen immer eine meromorphe Funktion konstruieren kann, die diese Hauptteile besitzt (vgl. etwa [*6*], p. 565 ff.). In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, wo die Polstellen meromorpher Funktionen analytische Mengen der Dimension $(n-1)$ bilden, läuft die Vorgabe von Hauptteilen auf die Vorgabe von sog. Cousin-I-Verteilungen hinaus [*16*]:

Def. 29 *(Cousin-I-Verteilung). Es sei* X *ein komplexer Raum;* $\{U_\iota, \iota \in I\}$ *sei eine offene Überdeckung von* X. *Eine Menge* $\{f_\iota\}$ *von in* U_ι *meromorphen Funktionen* f_ι *heißt dann eine Cousin-I-Verteilung in* X, *wenn in allen nichtleeren Durchschnitten* $U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}$ *die Differenz* $f_{\iota_1} - f_{\iota_2}$ *holomorph ist.*

Def. 30 *(Lösung einer Cousin-I-Verteilung). Eine in X meromorphe Funktion f heißt eine Lösung einer Cousin-I-Verteilung $\{f_\iota\}$, wenn jede Differenz $f-f_\iota$ in der offenen Menge U_ι holomorph ist.*

Es gilt nun als Verallgemeinerung des Mittag-Lefflerschen Satzes:

Satz 15. *In einem unverzweigten Holomorphiegebiet besitzt jede Cousin-I-Verteilung eine Lösung*[31]).

Für nicht-kompakte Riemannsche Flächen gilt ferner der Satz von Weierstrass, der aussagt, daß man zu jeder sich auf der Fläche nicht häufenden Punktfolge x_ν eine holomorphe Funktion finden kann, die in den Punkten x_ν von vorgegebener Ordnung c_ν und sonst nirgends verschwindet (vgl. [6], p. 566). In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen kann man in Analogie dazu folgenden Satz beweisen:

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{G}=(G, \Phi)$ ein unverzweigtes Holomorphiegebiet; A sei eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in G, die dort in die irreduziblen Bestandteile A_ν, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, zerfallen möge. Ist dann $c_\nu>0$ eine beliebige Folge natürlicher Zahlen, so gibt es stets eine in G holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$, die in A_ν mindestens von der Ordnung c_ν verschwindet*[32]).

Dagegen kann man im allgemeinen nicht wie in der komplexen Analysis einer Veränderlichen erreichen, daß $f(x)$ auf A_ν genau von der Ordnung c_ν verschwindet und keine Nullstellen in $G-A$ hat[33]).

Eine meromorphe Funktion auf einer nicht-kompakten Riemannschen Fläche ist dort stets der Quotient zweier holomorpher Funktionen. Für die Holomorphiegebiete gilt entsprechend als Folge von Satz 16 die Aussage:

Satz 17. *Der Körper $K(G)$ der in einem zusammenhängenden, unverzweigten Holomorphiegebiet $\mathfrak{G}=(G, \Phi)$ meromorphen Funktionen ist der Quotientenkörper des Integritätsringes $R(G)$ der in G holomorphen Funktionen.*

Jedoch kann man im allgemeinen nicht wie in der klassischen Theorie jede meromorphe Funktion als Quotient zweier holomorpher Funktionen darstellen, die lokal teilerfremd sind[34]).

§ 4. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete

1. Über die Funktionentheorie in verzweigten Riemannschen Gebieten ist bisher wenig bekannt geworden. Es ist z.B. noch ein offenes Problem, ob jedes pseudokonvexe Riemannsche Gebiet ein Holomorphiegebiet oder sogar

---

[31]) Nach [19], Satz B, sind holomorph-konvexe, unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem C sog. holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten (variétés de Stein). Satz 15 ergibt sich daher aus den Resultaten von H. Cartan [14]. Für schlichte Holomorphiegebiete wurde der Satz bereits 1937 von K. Oka [29] bewiesen.

[32]) In Verbindung mit [19], Satz B, ist Satz 16 eine direkte Folgerung aus [14], théorème A.

[33]) K. Stein hat hierfür ein Beispiel gegeben in seiner Habilitationsschrift: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727—757 (1940/41).

[34]) Zwischen den Sätzen 15, 16, 17 bestehen einige Beziehungen. Vgl. dazu etwa [3].

holomorph-konvex ist. Wir werden jedoch in diesem Paragraphen ein verzweigtes Holomorphiegebiet konstruieren, das weder holomorph-konvex noch pseudokonvex ist. Wir ziehen dazu die in § 2.6 diskutierte analytisch-verzweigte Überlagerung (Y^n, Φ, C^n) heran. Den Raum Y^n denken wir uns wie in § 2.4 durch die Schar der Ebenen $E(s)$ überdeckt, wobei s in einer RIEMANNschen Zahlenkugel läuft.

Es sei nun K ein Kreis $\{|s|<d<1\}$ der s-Ebene. Offenbar ist dann die Menge $G^n = \bigcup_{s\in K} E(s) - y_0$ eine offene zusammenhängende Teilmenge von Y^n und $\mathfrak{G}_0^n = (G^n, \Phi)$ ein RIEMANNsches Gebiet über dem C^n, das höchstens $n-1$ Blätter hat. — Wir notieren einige Eigenschaften von $\mathfrak{G}_0^n$:

(1) *G^n ist analytisch isomorph dem kartesischen Produkt $B^n = K\times\{C^k - O\}$, $k=n-1$.*

Beweis. Die Abbildung $\pi: s=\frac{z_1}{w_1}=\frac{z_2}{w_2}=\cdots=\frac{z_k}{w_k}$, $v_1=w_1, \ldots, v_k=w_k$ bildet G^n umkehrbar holomorph auf B^n ab.

Offenbar folgt aus (1), daß G^n eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und somit nur uniformisierbare Punkte enthält. Wir zeigen weiter:

(2) *Es gibt einen Punkt $\mathfrak{v}_0=(v_0, v_1, \ldots, v_k)\in C^n$, über dem genau ein Nichtverzweigungspunkt und kein weiterer Punkt von G^n liegt.*

Beweis. Wir wählen $\mathfrak{v}_0$ so, daß $\mathfrak{v}_0 \notin \Phi\big(E(\infty)\big)$ und $P(s)=v_0\prod_{\varkappa=1}^{k}(1+a_\varkappa s) - s\cdot\sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa\cdot\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varkappa}}^{k}(1+a_\nu s)$ mit den Werten $v_0, v_1, \ldots, v_k$ genau eine einfache Nullstelle $s_0\in K$ und keine weiteren Nullstellen in $\overline{K}$ besitzt. Das ist möglich, da bei beliebigen $v_\varkappa$ auch die Koeffizienten von $P(s)$ beliebig sind. Zu s_0 gehört genau ein Punkt $x_0\in E(s_0)-y_0<G^n$, der über $\mathfrak{v}_0$ liegt. Es gibt über $\mathfrak{v}_0$ keine weiteren Punkte $x\in G^n$. Ferner gibt es aus Stetigkeitsgründen zu $\mathfrak{v}_0$ eine Umgebung $U(\mathfrak{v}_0)$, so daß über jedem Punkt $\mathfrak{v}\in U$ genau ein Punkt $x\in G^n$ liegt. G^n ist also in einer Umgebung von x_0 sicher unverzweigt, d.h. $\mathfrak{v}_0$ hat die in (2) behauptete Eigenschaft.

Wir fügen jetzt zu G^n alle erreichbaren Randpunkte r hinzu. Da G^n Teilgebiet von $Y^n - y_0$ ist und über $Y^n - y_0$ einen glatten Rand besitzt, läßt sich ∂G^n außerhalb y_0 durch die Häufungsmenge von G^n in $Y^n - y_0 - G^n$ repräsentieren. Die oben angegebene Abbildung π kann man sich in diese Menge fortgesetzt denken. Zu jedem Punkt $r\in\partial G^n\cap(Y^n-y_0)$ gibt es eine Umgebung $U(r)<Y^n-y_0$, die vermöge π umkehrbar holomorph auf eine Umgebung $U^*(r^*)<C^n$, $r^*=\pi(r)\in\partial K\times\{C^k-O\}$ abgebildet wird. ∂G^n hat also in der Nähe von r die gleiche analytische Struktur wie ∂B^n in der Nähe von r^*. Daraus ergibt sich:

(3) *Ist $f^*(s, v_1, \ldots, v_k)$ eine in B^n holomorphe Funktion, die in $r^*=\pi(r)$, $r\in\partial G^n\cap(Y^n-y_0)$, eine Singularität hat, so läßt sich auch $f(x)=f^*\circ\pi(x)$ nicht über $r\in\partial G^n$ hinaus fortsetzen.*

Wir beweisen ferner:

(4) *Über $O\in C^n$ liegt genau ein Randpunkt $r_0\in\partial G^n$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß das Urbild $\Phi^{-1}(H)$ jeder Hyperkugel $H(O)$ eine nicht leere zusammenhängende Menge in G^n ist. Das aber ist klar, da $\pi \circ \Phi^{-1}(H) = \{(s(v_1 + \cdots + v_k),\ v_1(1+a_1 s),\ \ldots,\ v_k(1+a_k s)) \in H\} \cap B^n$ immer eine zusammenhängende Menge in B^n um $K \times O$ ist.

Dem Kontinuum der Randpunkte $K \times O$ von B^n entspricht also genau der Randpunkt r_0 von $\mathfrak{G}_0^n$, während die Punkte von $\partial K \times (C^k - O)$ und $\partial G^n - \breve{\Phi}^{-1}(O)$ eineindeutig einander zugeordnet sind. Man kann π^{-1} zu einer stetigen Abbildung $\bar{\pi}^{-1}$ von $\bar{B}^n$ auf $\breve{G}^n$ fortsetzen.

2. Wir zeigen nun:

(5) *$\mathfrak{G}_0^n$ ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis. $K \times C^k$ ist als Polyzylinder ein Holomorphiegebiet ([2], p. 36ff.). Es gibt also eine holomorphe Funktion $f^*(\mathfrak{v})$, die $K \times C^k$ zum Existenzgebiet hat. Nach (3) ist $f(x) = f^* \circ \pi(x)$ eine in G^n holomorphe Funktion, die in allen Randpunkten $r \in \partial G^n - r_0$ singulär ist. r_0 selbst ist aber Häufungspunkt dieser Randpunkte; denn $\bar{\pi}^{-1}$ bildet $\bar{B}^n$ stetig auf $\breve{G}^n$ ab, wobei das Urbild jeder Umgebung von r_0 eine volle Umgebung $U(\bar{K} \times O) \subset \bar{B}^n$ umfaßt. U enthält stets Punkte von $\partial K \times (C^k - O)$. Es folgt also, daß $f(x)$ auch in r_0 wesentlich singulär wird.

Es sei nun $\mathfrak{G}^* = (G^*, \Phi^*)$ ein Existenzgebiet von $f(x)$. $\mathfrak{G}_0^n$ ist in $\mathfrak{G}^*$ enthalten, $f(x)$ ist in G^* hinein fortsetzbar. Die spurpunkttreue Abbildung $\tau: G^n \to G^*$ ist zu einer stetigen Abbildung $\breve{\tau}: \breve{G}^n \to \breve{G}^*$ fortsetzbar. $\breve{\tau}$ bildet keinen Punkt von ∂G^n in das Innere von G^* ab, da $f(x)$ überall in ∂G^n singulär ist. Folglich ist $\mathfrak{A} = (G^n, \tau, G^*)$ eine unbegrenzte Überlagerung von G^*. Da τ außerdem spurpunkttreu abbildet und nach (2) über einem gewissen $\mathfrak{v}_0 \in C^n$ genau ein Nichtverzweigungspunkt von G^n liegt, muß $\mathfrak{A}$ einblättrig sein: τ bildet mithin G^n umkehrbar eindeutig auf G^* ab. $\mathfrak{G}_0^n$ und $\mathfrak{G}^*$ sind identisch, d.h. $\mathfrak{G}_0^n$ ist selbst das Existenzgebiet von $f(x)$ und damit ein Holomorphiegebiet.

Weiter gilt:

(6) *$\mathfrak{G}_0^n$ ist in allen Randpunkten $r \neq r_0$ pseudokonvex. In r_0 ist dagegen $\mathfrak{G}_0^n$ nicht pseudokonvex.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{G}_0^n$ pseudokonvex in jedem Randpunkt $r \neq r_0$, da in der Nähe eines solchen Punktes ∂G^n die gleiche Struktur hat wie ∂B^n in der Nähe von $\pi(r)$. ∂B^n ist aber dort der Rand eines Polyzylinders.

Demgegenüber ist $C^k - O$, $k \geqq 2$, in O nicht pseudokonvex. Es gibt vielmehr zu jedem $\varepsilon > 0$ eine in $C^k - O$ ausgezeichnete Schar ${}^*\sigma_\varepsilon(w, t)$, die O enthält. Für festes $s_0 \in K$ ist dann $(s_0, {}^*\sigma_\varepsilon(w, t))$ eine ausgezeichnete Schar in $B^n = K \times (C^k - O)$, deren Durchschnitt mit $K \times O$ nicht leer ist. Offenbar enthält die ausgezeichnete Schar $\sigma_\delta(w, t) = \bar{\pi}^{-1}(s_0, {}^*\sigma_\varepsilon(w, t))$ in $\mathfrak{G}_0^n$ den Punkt r_0. Da $\delta > 0$ beliebig klein wird, wenn ε gegen 0 geht, haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{G}_0^n$ in r_0 nicht pseudokonvex ist, q. e. d.

Die Holomorphiehülle von B^n ist $K \times C^k \neq B^n$. Daher ist B^n sicher nicht holomorph-konvex (vgl. [2], p. 73). Da ferner G^n und B^n analytisch isomorph sind und die Holomorphiekonvexität gegenüber eineindeutigen holomorphen Abbildungen invariant ist, folgt:

(7) *G^n ist nicht holomorph-konvex.*

Zusammenfassend ist also bewiesen:

Satz 18. *Es gibt über dem C^n, $n \geqq 3$, endlich-blättrige verzweigte Holomorphiegebiete, die aus lauter uniformisierbaren Punkten bestehen und weder holomorph-konvex noch pseudokonvex sind.*

3. Es ist bisweilen vermutet worden, daß die Holomorphiegebiete gegenüber holomorphen Transformationen invariant sind. Damit ist folgendes gemeint:

Sind $\mathfrak{G}_1 = (G_1, \Phi_1)$ und $\mathfrak{G}_2 = (G_2, \Phi_2)$ zwei RIEMANNsche *Gebiete über dem C^n und ist φ eine umkehrbar holomorphe Abbildung von G_1 auf G_2, so ist $\mathfrak{G}_1$ dann und nur dann ein Holomorphiegebiet, wenn $\mathfrak{G}_2$ ein Holomorphiegebiet ist.*

Für unverzweigte RIEMANNsche Gebiete ist die Richtigkeit dieser Vermutung bestätigt worden; denn in diesem Falle werden die Holomorphiegebiete durch die Holomorphiekonvexität charakterisiert (vgl. Satz 11). Die Holomorphiekonvexität hat aber auf Grund ihrer Definition die angegebene Invarianzeigenschaft.

Unser oben konstruiertes RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G}_0^n = (G^n, \Phi)$ lehrt nun, daß für verzweigte RIEMANNsche Gebiete die Vermutung falsch ist. Wie wir gezeigt haben, ist G^n vermöge π umkehrbar holomorph auf B^n abgebildet. Bezeichnet ι die Injektion $B^n \to C^n$, so ist das RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{B}^n = (B^n, \iota)$ dem Holomorphiegebiet $\mathfrak{G}_0^n$ analytisch äquivalent; indessen ist jedoch $\mathfrak{B}^n$, $n \geqq 3$, kein Holomorphiegebiet.

Es ist klar, daß funktionentheoretische Aussagen für $\mathfrak{G}_0^n$ und $\mathfrak{B}^n$ simultan gelten, wenn sie sich nur auf die komplexen Räume G^n bzw. B^n beziehen. Wir brauchen deshalb solche Aussagen nur für B^n nachzuweisen.

Nach CARTAN [11] gibt es im $C^2 - O$ eine Cousin-I-Verteilung $\{f_i^*\}$, die dort keine Lösung besitzt. Setzen wir $f_i(s, v_1, v_2) = f_i^*(v_1, v_2)$, so erhalten wir in B^3 eine Cousin-I-Verteilung, die in B^3 nicht lösbar ist. Damit ist bewiesen:

Satz 19. *Es gibt verzweigte Holomorphiegebiete über dem C^n, $n \geqq 3$, in denen nicht jede Cousin-I-Verteilung eine Lösung besitzt.*

Die Aussagen der Sätze 16, 17 behalten im Gegensatz zur Aussage von Satz 15 in den Holomorphiegebieten $\mathfrak{G}_0^n = (G^n, \Phi)$ ihre Gültigkeit. Wie vorhin brauchen wir das nur für den Raum B^n zu zeigen. Ist etwa A eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in $B^n = K \times (C^k - O)$, $n \geqq 3$, die dort in die irreduziblen Komponenten A_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, zerfällt, so läßt sich A_ν nach einem Fortsetzungssatz von THULLEN [40] zu einer in $K \times C^k$ analytischen Menge A'_ν fortsetzen. Da $K \times C^k$ ein Holomorphiegebiet im C^n ist, folgt aus Satz 16, daß man zu jeder Folge natürlicher Zahlen $c_\nu > 0$ eine in $K \times C^k$ holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$ finden kann, die auf A'_ν mindestens von der Vielfachheit c_ν

verschwindet. Da f erst recht in B^n holomorph ist, ergibt sich, daß f auch in B^n die Aussage von Satz 16 befriedigt. Satz 16 gilt also auch in $\mathfrak{H}_0^n$ [35]).

Unter Benutzung eines Fortsetzungssatzes für meromorphe Funktionen kann man in analoger Weise zeigen, daß ebenfalls Satz 17 seine Gültigkeit in $\mathfrak{H}_0^n$ behält. Es dürfte interessieren, ob Satz 16 und Satz 17 uneingeschränkt für beliebige Holomorphiegebiete gelten.

In dieser Arbeit wurden für die Dimensionen $n \geqq 3$ verzweigte Holomorphiegebiete angegeben, die nicht holomorph-konvex sind. Im Falle $n = 2$ versagt das angegebene Konstruktionsverfahren. Es bleibt offen, ob es auch nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete über dem C^2 gibt.

Literatur

[1] Behnke, H.: Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Arch. d. Math. **6**, 353—368 (1955). — [2] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. **3**. Berlin 1934. — [3] Behnke, H., u. K. Stein: Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jber. DMV. **47**, 177—192 (1937). — [4] Behnke, H., u. K. Stein: Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche. Ann. Mat. pura appl. **28**, 317—326 (1949). — [5] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). — [6] Behnke, H., u. F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Lehrbuch. Berlin 1955. — [7] Black, C. W. M.: The parametric representation of the neighborhood of a singular point of an analytic surface. Proc. Amer. Acad. **37** (1901). — [8] Carathéodory, C.: Über die analytischen Abbildungen von mehrdimensionalen Räumen. Verh. Int. Math. Congr. Zürich 1932, vol. I, 93—101. — [9] Cartan, H.: Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes. Bull. Soc. Math. France **59**, 46—69 (1931). — [10] Cartan, H., u. P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932). — [11] Cartan, H.: Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris **199** (1934). — [12] Cartan, H.: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs complexes. Proc. Int. Congr. Math. 1950, vol. I, 152—164. — [13] Cartan, H.: Séminaire E.N.S., Paris 1951/52 (hektographiert). — [14] Cartan, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie; Coll. sur les Fonct. de Plus. Variables, Bruxelles 1953, 41—55. — [15] Cartan, H.: Séminaire E.N.S., Paris 1953/54 (hektographiert). — [16] Cousin, P.: Sur les fonctions de n variables complexes. Acta Math. **19**, 1—62 (1895). — [17] Ehresmann, Ch.: Les prolongements d'une variété différentiable. AH. d. IV. Congr. dell'Un. Math. Ital., Taormina 1951. — [18] Ehresmann, Ch.: Struktures locales; Conférence à Rome, März 1952 (hektographiert). — [19] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955). — [20] Grauert, H.: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die Kählersche Metrik. Math. Ann. **131** (1956). — [21] Grauert, H., u. R. Remmert: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955). — [22] Grauert, H., u. R. Remmert: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht holomorph-

[35]) Unter Benutzung des verallgemeinerten Thullenschen Singularitätensatzes (vgl. [35]) kann man sogar zeigen:

Jede im Holomorphiegebiet $\mathfrak{H}_0$ rein q-dimensionale analytische Menge ist das genaue Nullstellengebilde von höchstens $n+1$ in $\mathfrak{H}_0$ holomorphen Funktionen, wenn $q > 1$. Dagegen gibt es eindimensionale analytische Mengen in $\mathfrak{H}_0$, die sich nicht als gemeinsame Nullstellenmenge von in $\mathfrak{H}_0$ holomorphen Funktionen — auch nicht von unendlich vielen — darstellen lassen.

konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Com. Math. Helv. 1956/57. — [23] Grauert, H., u. R. Remmert: Analytisch-verzweigte Überlagerungen und komplexe Räume (in Vorbereitung). — [24] Hirzebruch, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953). — [25] Hodge, W. V. D., u. D. Pedoe: Methods of Algebraic Geometry III. Cambridge 1954. — [26] Hopf, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, New York 167—185 (1948). — [27] Jung, H. W. E.: Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlichen in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$. J. reine u. angew. Math. **133**, 289—314 (1908). — [28] Menger, K.: Diemensionstheorie. Leipzig 1928. — [29] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. II—Domaines d'holomorphie. J. of Sci. Hirosima Univ. Ser. A **7**, Nr. 2, 115—130 (1937). — [30] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX—Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. **23**, 97—155 (1953). — [31] Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, II, 1. Berlin u. Leipzig 1929. — [32] Remmert, R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Coll. de Topologie, Strasbourg 1954. — [33] Remmert, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. **130**, 410—441 (1956). — [34] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **1957**. — [35] Remmert, R., u. K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [36] Stein, K.: Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Coll. de Topologie, Strasbourg 1954. — [37] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume II (in Vorbereitung). — [38] Teichmüller, O.: Veränderliche Riemannsche Flächen. Dtsch. Math. **1944**, 344—359. — [39] Thullen, P.: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen. Math. Ann. **106**, 64—76 (1932). — [40] Thullen, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1935). — [41] Waerden, B. L. van der: Die Bedeutung des Bewertungsbegriffs für die algebraische Geometrie. Jber. Math. Ver. **52**, 161—172 (1942). — [42] Weierstrass, K.: Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen. Wk. III, 53—114. — [43] Zariski, O.: Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math. **45**, 472—542 (1944).

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. März 1956)

GRUNSKY, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 129—132 (1957)

Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. I

Herrn GEORG FABER zum 80. Geburtstage gewidmet

Von
HELMUT GRUNSKY

Herr J. L. WALSH hat kürzlich zwei Sätze über konforme Abbildung endlich vielfach zusammenhängender Gebiete bewiesen[1]). Der erste besagt, daß stets ein Bildgebiet gewonnen werden kann, das berandet wird von zwei vollständigen Niveaulinien $|S(w)|=1$ und $|S(w)|=k>1$ einer Funktion

$$S(w)=A\frac{\prod_{\mu=1}^{m}(w-a_\mu)^{M_\mu}}{\prod_{\nu=1}^{n}(w-b_\nu)^{N_\nu}}, \qquad \sum M_\mu=\sum N_\nu,$$

wo für die M_μ und N_ν beliebige reelle Werte zugelassen sind. Dabei können die beiden Teilsysteme der Randkomponenten, auf denen $|S|=1$ bzw. $|S|=k$ gilt, willkürlich gewählt werden. Setzt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k=e$ (indem man von der verbleibenden Freiheit in der Wahl der Konstanten A, M_μ, N_ν Gebrauch macht), so heißt das: Das harmonische Maß $h_c(z)$ eines beliebig herausgegriffenen Teilsystems C der Randkomponenten läßt sich durch konforme Abbildung in eine elementare Funktion

$$\tilde{h}_c(w)=\sum_\mu M_\mu \log|w-a_\mu|-\sum_\nu N_\nu \log|w-b_\nu|+\text{const}$$

transformieren. Der zweite Satz läßt sich ähnlich interpretieren als Transformation von $\sum_{\varkappa=1}^{k}\alpha_\varkappa g(z,z_\varkappa)$ in eine elementare Funktion, wo $g(z,z_\varkappa)$ die GREENsche Funktion des gegebenen Gebietes mit Singularität $z_\varkappa$ ist und die $\alpha_\varkappa>0$ sind[2]).

[1]) WALSH, J. L.: C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1572—1574, 1756—1758 (1954).

[2]) Die Untersuchungen von WALSH knüpfen inhaltlich und methodisch an Arbeiten von DE LA VALLÉE POUSSIN und JULIA aus den Jahren 1930—1932 an, bei denen es sich jedoch vorwiegend um die komplizierteren Probleme handelte, die entstehen, wenn S eine rationale, speziell eine ganz rationale Funktion ist, während der Rand des Bildes nicht notwendig aus vollständigen Niveaulinien besteht; vgl. G. JULIA, Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, Paris 1934. Nur eine Note von DE LA VALLÉE POUSSIN bezieht sich auf einen Spezialfall des Problems von WALSH: C. r. Acad. Sci., Paris **192**, 128—131 (1931).

Zusatz bei der Korrektur: In einem zweiten Teil wird die hier verwendete Methode so weitergebildet, daß sie auch den Beweis der andern Ergebnisse von DE LA VALLÉE POUSSIN und JULIA ergibt.

Unter Benutzung eines grundlegenden Satzes der Uniformisierungstheorie gebe ich in dieser Note einen sehr kurzen Beweis eines etwas allgemeineren Satzes.

$\mathfrak{Z}$ sei ein n-fach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, sein Rand $Z = \bigcup_{\nu=1}^{n} Z_\nu$. Keine der Komponenten Z_ν sei in einen Punkt ausgeartet, und sie mögen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als analytische JORDAN-Kurven vorausgesetzt werden. Endlich sei $\infty \in \mathfrak{Z}$ angenommen. $z_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$ sei ein gegebenes System von Punkten aus $\mathfrak{Z}$, die wir als $\neq \infty$ annehmen wollen, $\alpha_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$, $c_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ zwei Systeme von reellen Zahlen. $\mathfrak{g}(z)$ sei eine reellwertige Funktion für $z \in \mathfrak{Z}$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $\mathfrak{g}(z) + \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa \log |z - z_\varkappa|$ ist harmonisch in $\mathfrak{Z}$. 2. $\mathfrak{g}(z)$ hat auf Z_ν die konstanten Randwerte c_ν. 3. Die Ableitung nach der äußeren Randnormalen, $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$, wechselt auf keinem Z_ν das Vorzeichen (es ist also für verschiedene Z_ν verschiedenes Vorzeichen zugelassen, und auch $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n} = 0$ ist nicht ausgeschlossen, kann aber natürlich nur in isolierten Punkten vorkommen). Bezeichnet $g(z, \zeta)$ die GREENsche Funktion von $\mathfrak{Z}$, $h_\nu(z)$ das harmonische Maß von Z_ν, so ist

$$\mathfrak{g}(z) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa g(z, z_\varkappa) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu h_\nu(z).$$

Die Bedingung 3. bedeutet eine Einschränkung für die Wahl der Konstanten $z_\varkappa, \alpha_\varkappa, c_\nu$. Sie ist insbesondere erfüllt, wenn alle $\alpha_\varkappa = 0$ und für die c_ν nur zwei verschiedene Werte zugelassen sind; ebenso, wenn alle $c_\nu = 0$ und die $\alpha_\varkappa$ alle von einerlei Vorzeichen sind. Diese beiden Spezialisierungen führen auf die eingangs genannten Sätze von Herrn WALSH.

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Es gibt genau eine konforme Abbildung $w = F(z)$ von $\mathfrak{Z}$, die bei ∞ durch*

$$F(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

normiert ist, derart, daß sich die Funktion $\mathfrak{g}(z)$ transformiert in $\tilde{\mathfrak{g}}(w) = \log |S(w)|$ mit

$$\begin{cases} S(w) = A \prod_{\varkappa=1}^{k} (w - w_\varkappa)^{-\alpha_\varkappa} \prod_{\nu=1}^{n} (w - b_\nu)^{-\beta_\nu} \\ A = e^{\mathfrak{g}(\infty)}, \; w_\varkappa = F(z_\varkappa), \; \beta_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n} \, ds, \end{cases} \tag{2}$$

wobei in jeder Komponenten der Komplementärmenge des Bildgebietes genau ein Punkt b_ν liegt[3]).

Beweis. Es sei $\mathfrak{Z}_\nu$ das Innere von Z_ν, a_ν ein beliebiger fester Punkt aus $\mathfrak{Z}_\nu$, $g_\nu(z, \zeta)$ die GREENsche Funktion von $\mathfrak{Z}_\nu$. Wir erklären auf Z_ν (mit der

[3]) Man beachte die Gl. (6), aus der die Regularität von $S(w)$ in ∞ und ihre Invarianz gegenüber einer Streckung folgt.

Bogenlänge s) zwei Funktionen, indem wir zunächst willkürlich einen Anfangspunkt $z_{\nu 0} \in Z_\nu$ wählen und setzen:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_{\nu 0}}^{z} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n} ds, \qquad \varphi_\nu(z) = \frac{\beta_\nu}{2\pi} \int_{z_{\nu 0}}^{z} \frac{\partial g_\nu(z, a_\nu)}{\partial n} ds, \qquad z \in Z_\nu \text{ [4]}.$$

Beide Funktionen ändern sich bei einem Umlauf um Z_ν monoton im strengen Sinne von 0 bis β_ν. Daher wird durch die Gleichung

$$\varphi(z) = \varphi_\nu(z^{(\nu)}) \tag{3}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Z_ν auf sich selbst erklärt; sie ist in beiden Richtungen regulär analytisch, abgesehen von den endlich vielen Nullstellen von $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$. Indem wir nun einen Punkt $z^{(\nu)}$ von Z_ν als Randpunkt von $\mathfrak{Z}_\nu$ identifizieren mit demjenigen Randpunkt z von $\mathfrak{Z}$, der ihm vermöge (3) entspricht, machen wir die z-Ebene zu einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit vom topologischen Typus der Vollkugel. Sie läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf eine w-Kugel abbilden, und wir normieren die vermittelnde Funktion $w = F(z)$ gemäß (1). Die Bilder der $z_\varkappa$ seien mit $w_\varkappa$, die der a_ν mit b_ν bezeichnet. Dann ist leicht zu sehen, daß bei dieser Abbildung die Transformierte von $\mathfrak{g}(z)$ in der Form (2) erscheint.

Bezeichnet man nämlich die durch Verpflanzung einer Funktion aus der z- in die w-Ebene entstehende Funktion durch das zusätzliche Zeichen $\sim$, so ist $\tilde{g}_\nu(w, b_\nu)$ die GREENsche Funktion von $\mathfrak{W}_\nu$, dem Inneren des Bildes W_ν von Z_ν, und wegen der Invarianz von $\frac{\partial g_\nu}{\partial n} ds$ und $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n} ds$ auf dem Rande gilt in einem beliebigen Punkte $w = F(z) = w^{(\nu)} = F(z^{(\nu)}) \in W_\nu$:

$$\tilde{\varphi}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{w_{\nu 0}}^{w} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n} ds = \tilde{\varphi}(w^{(\nu)}) = \frac{\beta_\nu}{2\pi} \int_{w_{\nu 0}}^{w^{(\nu)}} \frac{\partial \tilde{g}_\nu}{\partial n} ds, \qquad w_{\nu 0} = F(z_{\nu 0});$$

daher gilt auf W_ν:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n} = \beta_\nu \frac{\partial \tilde{g}_\nu}{\partial n}; \tag{4}$$

außerdem ist dort

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial s} = \beta_\nu \frac{\partial \tilde{g}_\nu}{\partial s} = 0. \tag{5}$$

Nun ist $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}(w)}{\partial w}$ [5]), abgesehen von den $w_\varkappa$, eine analytische Funktion von w,

---

[4]) $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet immer die Ableitung nach der *in bezug auf* $\mathfrak{Z}$ bzw. sein Bild $\mathfrak{W}$ äußeren Randnormalen.

[5]) $\frac{\partial}{\partial w}$ ist erklärt durch $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v}\right)$ $(w = u + iv)$. Falls die Funktion $p(w)$, auf die der Operator angewandt wird, reell ist, so ist $\frac{\partial p}{\partial w} = \frac{1}{2} \overline{\text{grad } p}$, und bei harmonischem p ist das eine analytische Funktion. In diesem Falle kann auch geschrieben werden $p = \frac{1}{2}(P + \bar{P})$, wo P eine analytische Funktion ist, und es ist $\frac{\partial p}{\partial w} = \frac{1}{2} P'$. Insbesondere ist also, wenn p in ∞ regulär harmonisch ist dort $\frac{\partial p}{\partial w} = O(w^{-2})$.

ebenso $\beta_\nu \frac{\partial \tilde{g}_\nu(w, b_\nu)}{\partial w}$, abgesehen von b_ν, und die beiden Gln. (4) und (5) besagen, daß diese beiden Funktionen auf W_ν übereinstimmende Randwerte haben und sonach analytische Fortsetzung voneinander sind. Die so definierte analytische Funktion $R(w)$ ist also in der ganzen w-Ebene regulär mit Ausnahme der $w_\varkappa$ und der b_ν. In diesen Punkten hat sie Pole mit den Hauptgliedern $\frac{1}{2}\frac{-\alpha_\varkappa}{w-w_\varkappa}$ bzw. $\frac{1}{2}\frac{-\beta_\nu}{w-b_\nu}$. Nun ist aber nach dem GAUSSschen Integralsatz

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = 0. \tag{6}$$

Daher ist

$$R(w) = \frac{1}{2} \sum \frac{-\alpha_\varkappa}{w - w_\varkappa} + \frac{1}{2} \sum \frac{-\beta_\nu}{w - b_\nu}.$$

Denn die rechte Seite verschwindet in $w = \infty$ in zweiter Ordnung, wie das für $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial w}$ der Fall sein muß. Integration ergibt

$$\tilde{\mathfrak{g}}(w) = 2\,\mathfrak{Re} \int R(w)\, dw = \mathfrak{Re}\left\{\sum \log (w - w_\varkappa)^{-\alpha_\varkappa} + \sum \log (w - b_\nu)^{-\beta_\nu} + c\right\},$$

womit die Existenzaussage des Satzes bewiesen ist.

Die Einzigkeitsaussage ergibt sich leicht nach folgender Überlegung: Angenommen, es gebe zwei Abbildungen, die das Verlangte leisten. Als Bildebene der zweiten wählen wir die z-Ebene. Da nun die Funktionen $\mathfrak{g}(z)$ und $\beta_\nu g_\nu(z, a_\nu)$ denselben analytischen Ausdruck haben, so ist $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n} = \beta_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial n}$, also $\varphi(z) \equiv \varphi_\nu(z)$, und die Gl. (3) identifiziert Punkte, die ohnehin zusammenfallen. Daher ist die oben eingeführte RIEMANNsche Mannigfaltigkeit die volle z-Ebene, $w = F(z)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung derselben und mit Rücksicht auf ihre Normierung die Identität.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. Mai 1956)

Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 133—138 (1957)

Zur konformen Abbildung schlichter Gebiete

Herrn Geheimrat FABER zum 80. Geburtstag gewidmet

Von

J. HEINHOLD

Es soll im folgenden der Begriff der Schmiegungsfunktion für konforme Abbildungen, wie er von KOEBE [1] beim Beweis des RIEMANNschen Abbildungssatzes für einfach zusammenhängende Gebiete benutzt wurde, auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinert werden. Bei KOEBE wird das nach Voraussetzung im Innern des Einheitskreises gelegene einfach zusammenhängende schlichte Gebiet $\mathfrak{G}$ mit dem Nullpunkt als innerem Punkt durch eine Folge analytischer Funktionen $\varphi_\nu(z_\nu) = z_{\nu+1}$ mit der Normierung $\varphi_\nu(0) = 0$, $\varphi_\nu'(0) > 0$ auf eine Folge von Gebieten $\mathfrak{G}_{\nu+1}$, $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$, $z_0 = z$ mit den Rändern $\mathfrak{R}_{\nu+1}$ umkehrbar eindeutig und konform so abgebildet, daß der Minimalabstand der Randpunkte von $\mathfrak{R}_{\nu-1}$ vom Nullpunkt mit $\nu \to \infty$ monoton gegen 1 geht. Es konvergiert dann

$$\Phi_\nu(z) = \varphi_\nu\big(\varphi_{\nu-1}\big(\ldots(\varphi_0(z))\ldots\big)\big)$$

für $\nu \to \infty$ gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ gegen die gesuchte Abbildungsfunktion. Die Funktionen φ_ν nennt KOEBE Schmiegungsfunktionen. Er verwendet hierfür die bekannten schon von CARATHÉODORY benutzten Quadratwurzelabbildungen. Für die Praxis brauchbare, den Besonderheiten der vorliegenden Gebiete anzupassende Schmiegungsfunktionen für die Abbildung ein- bzw. zweifach zusammenhängender Gebiete wurden von RINGLEB [2], HEINHOLD [3], [4] und ALBRECHT [4], [5] bzw. [6] angegeben.

1.

Wie seit den grundlegenden Arbeiten KOEBEs [7] bekannt ist, läßt sich jedes n-fach zusammenhängende schlichte Gebiet $\mathfrak{G}$ durch eine in $\mathfrak{G}$ analytische schlichte Funktion auf gewisse Typen von Normalgebieten $\mathfrak{N}$ abbilden, etwa auf Geradenschlitzgebiete mit parallelen oder radial vom Nullpunkt aus verlaufenden Schlitzen oder auf Kreisbogenschlitzgebiete, z.B. auf die längs konzentrischer Kreisbogen um den Nullpunkt geschlitzte Ebene, bzw. Einheitskreis oder konzentrischen Kreisring um den Nullpunkt. Die Abbildungsfunktionen sind unter gewissen Normierungsbedingungen eindeutig festgelegt und können als Lösungen gewisser Extremalprobleme innerhalb der Familie der in dem abzubildenden Gebiet regulären schlichten Funktionen betrachtet werden. Man kann (s. z.B. [8]) in jedem dieser Fälle ein stetiges Funktional $F(f)$ dieser in $\mathfrak{G}$ regulären schlichten Funktionen $f(z)$ angeben, dessen Betrag für die gesuchte Abbildungsfunktion auf das Normalgebiet ein Extremum annimmt. Mitunter stehen mehrere derartige Funktionale

zur Verfügung. Wir werden im folgenden nur beschränkte Funktionale voraussetzen, was für die Konstruktion praktisch brauchbarer Schmiegungsverfahren von Bedeutung sein kann (s. Fußnote 3).

Es liege ein n-fach zusammenhängendes, von n Randkontinuen mit jeweils mehr als einem Randpunkt begrenztes, gemäß gewissen Bedingungen (B) normiertes Gebiet $\mathfrak{G}$ vor. Hierunter sei insbesondere die Bedingung, daß $\mathfrak{G}$ in einem vorgegebenem endlichen Gebiet (z.B. im Falle $n=1$ bzw. $n \geqq 2$ im Innern des Einheitskreises bzw. eines konzentrischen Kreisringes um den Nullpunkt) gelegen sei. Eine in $\mathfrak{G}$ reguläre, schlichte Abbildungsfunktion, welche die Bedingungen (B) unverändert läßt, nennen wir eine „nach (B) normierte Funktion". Von den Bedingungen (B) kann weiter vorausgesetzt werden, daß eine hiernach normierte Funktion keine Konstante sein und eine konvergente Folge (B)-normierter Funktionen nur wieder gegen eine (B)-normierte Funktion konvergieren kann. Die nach (B) normierten Funktionen bilden dann eine normale, kompakte Familie $\mathfrak{F}$.

Def. 1. $F(f)$ sei ein für die Funktionen $f(z)$ von $\mathfrak{F}$ definiertes Funktional von beschränktem Betrag. Wir nennen eine analytische Funktion $\varphi(w)$, die mit einer in $\mathfrak{G}$ regulären, schlichten nach (B) normierten Funktion $w=f(z)$ wieder eine derartige Funktion $\varphi(f(z))$ ergibt, so daß in

$$|F(\varphi(f))| > |F(f)|$$

gilt, eine „F-Schmiegungsfunktion von $\mathfrak{G}$".

Hat man eine Folge solcher Schmiegungsfunktionen φ_ν von $\mathfrak{G}$, so ist hiernach auch

$$\Phi_\nu(z) = \varphi_\nu(\varphi_{\nu-1}(\ldots(\varphi_0(z))\ldots))$$

eine in $\mathfrak{G}$ reguläre, schlichte, nach (B)-normierte Funktion und F-Schmiegungsfunktion von $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}$ soll nun auf ein schlichtes Normalgebiet vom Typus $\mathfrak{N}$ unter Erhaltung der Normierungsbedingungen abgebildet werden.

Def. 2. Wir sagen, F ist ein „den Typus $\mathfrak{N}$ erzeugendes Funktional" der Funktionenklasse $\mathfrak{F}$, wenn es, solange das durch eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{G}$ erzeugte Gebiet $\mathfrak{G}'$ noch nicht vom Typus $\mathfrak{N}$ ist, stets eine F-Schmiegungsfunktion von $\mathfrak{G}$, φ, gibt, so daß

$$|F(\varphi(f))| > |F(f)|$$

ist.

Es gilt dann der folgende

Satz. Hat man ein für die in $\mathfrak{G}$ regulären, schlichten, nach (B) normierten Funktionen definiertes, beschränktes, den Typus $\mathfrak{N}$ erzeugendes Funktional F mit Schmiegungsfunktionen φ_ν, so gilt:

1. Es existiert eine in $\mathfrak{G}$ reguläre, schlichte Funktion $f^*(z)$, für die $|F(f(z))|$ ein Maximum M annimmt. Diese Funktion leistet die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf ein Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$.

2. Hat man *irgendeine* Folge von F-Schmiegungsfunktionen φ_ν von $\mathfrak{G}$ eines den Typ $\mathfrak{N}$ erzeugenden Funktionals, für die $|F(\Phi_\nu)|$ mit $\nu \to \infty$ gegen M und $\Phi_\nu(z)$ gegen eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $\Phi(z)$ konvergiert, so bildet $\Phi(z)$ das Gebiet $\mathfrak{G}$ auf ein schlichtes Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$ ab.

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß die in $\mathfrak{G}$ regulären schlichten nach (B) normierten Funktionen $f(z)$ eine normale kompakte Familie $\mathfrak{F}$ bilden. Da der Betrag von F für diese Funktionen beschränkt ist, gibt es eine obere Grenze M von $|F(f)|$. Dann gibt es eine Funktion $f^*(z)$, so daß $|F(f^*)| = M$ ist oder man kann aus $\mathfrak{F}$ eine Folge von Funktionen $f_n(z)$ auswählen, für die $|F(f_n(z))|$ gegen M konvergiert, $\lim_{n\to\infty} |F(f_n(z))| = M$. Aus dieser Funktionenfolge $f_n(z)$ läßt sich eine Teilfolge $f_{n_\nu}(z)$ auswählen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f^*(z) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(z)$ konvergiert. $f^*(z)$ kann nur eine schlichte in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion oder eine Konstante sein [9]. Letzteres scheidet wegen der Normierungsbedingungen aus. $f^*(z)$ ist selbst (B)-normiert und gehört somit zu $\mathfrak{F}$. Ferner ist $\lim_{\nu\to\infty} |F(f_{n_\nu}(z))| = M$. Daher ist für jedes beliebig klein gewählte $\varepsilon > 0$ stets eine Schranke $N(\varepsilon)$ angebbar, so daß für $\nu > N(\varepsilon)$ stets $|F(f_{n_\nu})| > M - \varepsilon$ ausfällt. Es kann somit nur $|F(f^*(z))| \geqq M$ sein. $|F(f^*(z))| > M$ scheidet jedoch aus, da $f^*(z)$ zu $\mathfrak{F}$ gehört und M die obere Grenze des Betrags $|F(f(z))|$ in $\mathfrak{F}$ ist. Somit[1]) ist $|F(f^*(z))| = M$. $f^*(z)$ leistet die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf ein Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$. Anderenfalls könnte man eine F-Schmiegungsfunktion φ angeben. Dann wäre aber $\varphi(f^*(z))$ eine Funktion von $\mathfrak{F}$ mit $|F(\varphi(f^*(z)))| > |F(f^*(z))| = M$. Widerspruch. In gleicher Weise folgt, daß die aus speziellen F-Schmiegungsfunktionen von $\mathfrak{G}$ als Grenzfunktion erhaltene in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion Φ zu $\mathfrak{F}$ gehört und wegen $|F(\Phi)| = M$ eine Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf den Typ $\mathfrak{N}$ erzeugt.

Erzeugende Funktionale liefern die bekannten Extremaleigenschaften der Abbildungsfunktionen auf Normalgebiete $\mathfrak{N}$. Ist nämlich F ein für die Familie $\mathfrak{F}$ der in einem n-fach zusammenhängenden nach (B)-normierten Gebiet $\mathfrak{G}$ regulären, schlichten, nach (B) normierten Funktionen definiertes Funktional, dessen Betrag für eine Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf ein Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$ und nur hierfür ein Maximum M annimmt, so ist es ein aus $\mathfrak{G}$ den Typus $\mathfrak{N}$ erzeugendes Funktional. Bildet nämlich $f^*(z)$ $\mathfrak{G}$ nach (B) normiert auf ein Gebiet vom Typ $\mathfrak{N}$ ab, dann ist nach Voraussetzung $|F(f^*(z))| = M$ und für eine Funktion $f_1(z)$ von $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{G}$ auf ein vom Typus $\mathfrak{N}$ verschiedenes Gebiet $\mathfrak{G}_1$ abbildet, gilt $|F(f_1(z))| < M$. Andererseits ist auch die Umkehrfunktion $z = f_1^{-1}(w)$ eine nach (B) normierte Funktion, die $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}$ abbildet. $\varphi(w) = f^*(f_1^{-1}(w))$ ist dann eine nach (B) normierte Funktion, die $\mathfrak{G}_1$ auf ein Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$ abbildet. Wegen $\varphi(f_1(z)) = f^*(z)$ gilt dann $|F(\varphi(f_1(z)))| > |F(f_1(z))|$, w. z. b. w.

Für die praktische Brauchbarkeit eines Schmiegungsverfahrens ist jedoch die Art der Schmiegungsfunktionen ausschlaggebend. Diese müssen, da man

[1]) Falls F ein stetiges Funktional ist, folgt diese Gleichung unmittelbar aus

$$\lim_{\nu\to\infty} F(f_{n_\nu}(z)) = F\Big(\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(z)\Big).$$

in einem praktischen Fall derartige Schmiegungsoperationen mehrfach anzuwenden hat, so beschaffen sein, daß man die Abbildungen $z_{\nu+1} = \varphi_\nu(z_\nu)$ numerisch oder graphisch bequem durchführen und durch Wahl freier Parameter den Besonderheiten der abzubildenden Zwischengebiete $\mathfrak{G}_\nu$ gut anpassen kann.

2.

Praktisch brauchbare Schmiegungsfunktionen kann man bis jetzt für ein- und zweifach zusammenhängende Gebiete angeben.

a) Bei der Abbildung eines einfach zusammenhängenden Teilgebietes $\mathfrak{G}$ des Einheitskreises mit dem Nullpunkt als innerem Punkt auf das Innere des Einheitskreises um 0 besteht die Normierung (B) darin, daß jedes derartige Teilgebiet durch die Abbildungsfunktion wieder auf ein Teilgebiet des Einheitskreises unter Festhaltung des Nullpunktes und gegebenenfalls des positiven Richtungselementes abgebildet werden soll. Als ein beschränktes, den Einheitskreis erzeugendes Funktional kann der Minimalabstand der Randpunkte des durch die Abbildungsfunktion erhaltenen Teilgebietes vom Nullpunkt angesehen werden. F-Schmiegungsfunktionen sind dann z.B. die bekannten KOEBE-CARATHÉODORYschen Wurzelabbildungen. Die Existenz weiterer praktisch brauchbarer F-Schmiegungsfunktionen folgt aus dem SCHWARZschen Lemma, wenn man das jeweils abzubildende Gebiet in ein Teilgebiet des Einheitskreises einbetten kann, das sich auf den ganzen Einheitskreis abbilden läßt [4]. Der Fall, daß das abzubildende Gebiet ∞ als inneren, 0 als äußeren Punkt enthält und die Abbildung auf das Äußere des Einheitskreises zu leisten ist, läßt sich mittels $Z = 1/z$ auf den obigen Fall zurückführen, doch hat man im reziproken Absolutbetrag des Maximalabstandes der Randpunkte der Bildgebiete von 0 direkt ein erzeugendes Funktional für diese Abbildungsaufgabe. Die Konstruktion der zugehörigen Schmiegungsfunktionen ist evident. Dieselben Funktionale und Schmiegungsfunktionen sind ferner in sinngemäßer Abänderung für die Abbildung auf das Innere bzw. Äußere eines Kreises um 0 mit einem von 1 verschiedenen Radius zu verwenden.

b) Man kann im vorigen Fall auch mit einer anderen Normierung (B) als der Nullpunktsnormierung auskommen. Hierbei betrachtet man das Innere des Einheitskreises als nichteuklidische Ebene mit POINCARÉscher Metrik. Nach der PICKschen Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas [10] wird durch jede im Einheitskreis E_w ($|w| < 1$) unimodular beschränkte reguläre Funktion das Innere des Einheitskreises auf sich oder einen Teil davon so abgebildet, daß der n.e. Abstand zweier Punkte nicht zunimmt. Wird daher ein Teilgebiet des Einheitskreises der z-Ebene durch eine analytische Funktion auf den schlichten Einheitskreis E_w abgebildet, so wird hierdurch ein in diesem Teilgebiet liegendes Gebiet n.e. expandiert. Für die n.e. Entfernung zweier entsprechender Punktepaare gilt dann die Ungleichung $E(w_1, w_2) > E(z_1, z_2)$ mit $E(z_1, z_2) = 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\psi(z_1, z_2)$, $\psi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{1 - |z_1 z_2|}$. Daraus folgt

für $z_1 \to z_2$ die Ungleichung

$$|F(w)| = \frac{\left|\frac{dw}{dz}\right|}{1-|w|^2} > \frac{1}{1-|z|^2}.$$

$|F(w)|$ ist ein Maß für die Größe der n.e. Expansion an der Stelle z. Es ist für alle Funktionen, die ein Teilgebiet $\mathfrak{G}$ des Einheitskreises auf ein ebensolches abbilden in einem inneren Punkt z_0 am größten bei den Funktionen, die $\mathfrak{G}$ auf den vollen Einheitskreis abbilden und kann daher als ein den Einheitskreis erzeugendes Funktional angesehen werden. Es ist wegen der bekannten Verzerrungssätze beschränkt und sogar stetig. Die zugehörigen Schmiegungsfunktionen sind in gleicher Weise wie unter a) zu erhalten, es kann jedoch die Nullpunktnormierung wegbleiben. Die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf den Einheitskreis kann nachträglich durch die Zuordnung zweier Linienelemente eindeutig festgelegt werden[2]).

c) Für die konforme Abbildung eines zweifach zusammenhängenden schlichten Gebietes $\mathfrak{G}$, bei dem die Randkontinuen jeweils mindestens zwei Punkte haben, kann man o. B. d. A. als Bedingungen (B) annehmen, daß $\mathfrak{G}$ und die hieraus durch Abbildung entstehenden Gebiete innerhalb eines konzentrischen Kreisringes um 0 $(0<r<|z|<R)$ liegen und die Ränder dieser Gebiete den Kreis $|z|=r$ ganz umschließen. Ist D der Maximalabstand der Randpunkte der äußeren Begrenzung von $\mathfrak{G}$ von 0, d der Minimalabstand der inneren Randpunkte von 0, so setzen wir $r=d$ und $R=D$. Allgemein sei D_ν bzw. d_ν der Maximal- bzw. Minimalabstand der Randpunkte der äußeren bzw. inneren Begrenzung eines aus $\mathfrak{G}$ durch eine nach (B) normierte Funktion $f(z)$ erhaltenen Gebietes $\mathfrak{G}_\nu$. Als ein den Kreisring erzeugendes, beschränktes Funktional kann hier die Größe $\frac{d_\nu}{D_\nu} = F(f_\nu(z))$ Verwendung finden, der reziproke Wert des äußeren Moduls nach Albrecht [5][3]). Schmiegungsfunktion ist hier jede nullpunktnormierte Schmiegungsfunktion nach a) für die Abbildung des einfach zusammenhängenden endlichen Gebietes, das vom äußeren Rand des Ringgebietes $\mathfrak{G}_\nu$ begrenzt wird, auf den Kreis $|z_\nu|<D_\nu$, sowie jede den Punkt ∞ festhaltende Schmiegungsfunktion nach a) für die Abbildung des einfach zusammenhängenden unendlichen Gebietes, das vom inneren Rand des Ringgebietes $\mathfrak{G}_\nu$ begrenzt wird auf $|z_\nu|>d$. Ist nämlich nach Ausübung einer solchen Abbildung $d_{\nu+1}$ bzw. $D_{\nu+1}$ der neue Minimal- bzw. Maximalabstand der inneren bzw. äußeren Begrenzung von 0, so gilt bei den

[2]) Nach Unkelbach [11] läßt sich jede mit $f(0)=0$ und $f'(0)>0$ normierte unimodular beschränkte schlichte Funktion unter gewissen Bedingungen durch kongruente Abbildungen des Einheitskreises approximieren. Aus b) ergibt sich leicht ein entsprechender Sachverhalt bei n.e. Kongruenz.

[3]) In dieser Arbeit von Albrecht wird beim Existenzbeweis für die Abbildungsfunktion S. 172 angenommen und benutzt, daß der äußere Modul eines Ringgebietes ein stetiges Funktional ist. Das ist jedoch, wie Herr Gaier in einem Brief an den Verf. bemerkt, nicht der Fall. Wie aus 1. folgt, genügt jedoch für den Existenzbeweis schon die Tatsache, daß der äußere Modul bzw. sein reziproker Wert ein beschränktes Funktional ist.

Abbildungen der ersten Art $d_{\nu+1} > d_\nu$, $D_{\nu+1} = D_\nu$, bei den der zweiten Art $d_{\nu+1} = d_\nu$, $D_{\nu+1} < D_\nu$. In jedem Falle ist also $\frac{d_{\nu+1}}{D_{\nu+1}} > \frac{d_\nu}{D_\nu}$. Dieses Verfahren läßt sich solange fortsetzen als es noch Punkte in $d_{\nu+1} < |z_{\nu+1}| < D_{\nu+1}$ gibt, die nicht zu $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ gehören.

d) Bei einem Iterationsverfahren von Grötzsch [12] für die Abbildung n-fach zusammenhängender Gebiete etwa auf die von konzentrischen Kreisbogenschlitzen um 0 begrenzte Ebene wird jeweils ein Randkontinuum auf dem die Schwankung von $\log|z|$ am größten ist, auf einen Kreisbogenschlitz mit 0 als Mittelpunkt abgebildet. Dabei wird bei jeder Iteration die Kreisbogenform eines vorher transformierten Randkontinuums wieder zerstört, ähnlich wie bei den Verfahren von Komatu [13] und Graeser [14] für die Abbildung von Ringgebieten. Jede Abbildung auf einen Kreisbogenschlitz um 0 kann aber selbst nur iterativ erfolgen. Es bleibt somit für $n \geqq 3$ die Aufgabe ein Schmiegungsverfahren zu finden, das ähnlich wie das unter c) angegebene modifizierte Albrechtsche Verfahren in einer einfachen Folge von praktisch durchführbaren Schmiegungsschritten direkt zum Ziele führt.

Literatur

[1] Koebe, P.: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I. J. reine angew. Math. **145**, 177—195 (1915). — [2] Ringleb: Numerische und graphische Verfahren der konformen Abbildung. Heidelberg 1939. — [3] Heinhold, J.: Ein Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. **1948**, 203—222. — [4] Heinhold, J., u. R. Albrecht: Zur Praxis der konformen Abbildung. Rendiconti del Circolo matem. Palermo **3**, 2—19 (1954). — [5] Albrecht, R.: Zum Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung. Z. angew. Math. u. Mechanik **32**, 316—318 (1952). — [6] Albrecht, R.: Iterationsverfahren zur konformen Abbildung eines Ringgebietes auf einen konzentrischen Kreisring. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. **1954**, 169—178. — [7] Koebe, P.: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. IV. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. Acta Math. **41**, 305—344 (1918). — [8] Nehari, Z.: Conformal Mapping, S. 341 ff. New York 1952. — [9] Carathéodory, C.: Funktionentheorie, Bd. I, S. 193. Basel 1950. — [10] Carathéodory, C.: Funktionentheorie, Bd. II, S. 15. Basel 1950. — [11] Unkelbach, H.: Über die Approximation schlichter konformer Abbildungen durch kongruente Iterationen spezieller sterniger oder konvexer konformer Abbildungen. Math. Z. **58**, 63—70 (1953). — [12] Grötzsch, H.: Zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. Ber. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. **83**, 67—76 (1931). — [13] Komatu, Y.: Ein alternierendes Approximationsverfahren für konforme Abbildung von einem Ringgebiet auf einen Kreisring. Proc. Jap. Akad. **21**, 146—155 (1945). — [14] Graeser, E.: Über konforme Abbildung des allgemeinen zweifach zusammenhängenden schlichten Bereiches auf die Fläche des Einheitskreises. Diss. Leipzig 1930.

Technische Hochschule München, Lehrstuhl für angewandte Mathematik und mathematische Statistik

(Eingegangen am 28. Juli 1956)

Hofmann, J. E.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 139—146 (1957)

Zur Entwicklungsgeschichte der Eulerschen Summenformel

Herrn G. Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Jos. E. Hofmann

1. Im mathematischen Gesamtwerk Eulers nehmen die Beiträge zur Reihenlehre eine interessante Sonderstellung ein. Auf diesem Gebiete ist Euler stärker Autodidakt denn auf anderen. Erst in Petersburg gewinnt er im Ringen um die Ergebnisse der Wallisschen *Arithmetica infinitorum*[1]) von 1656 — eines damals bereits völlig veralteten Werkes — neue Gesichtspunkte. In selbständig gestaltender Weiterbildung von mancherlei Anregungen, die ihm über die Kollegen aus dem engen Kreise der Akademie zufließen, sind die ersten Beiträge zur Reihenlehre entstanden, im Anfang noch ungelenk in Bezeichnung und Ausdrucksweise, später flüssiger und lebendiger, bis sich auch hier die Meisterhand des großen Genies bekundet. Wir verdanken den Herren C. Boehm und G. Faber die ausgezeichnete dreibändige Ausgabe der Einzelschriften Eulers zur Reihenlehre[2]) und Herrn Faber eine wertvolle Zusammenfassung der abgedruckten Abhandlungen nach sachlichen Gesichtspunkten[3]). Erst auf dieser Unterlage bauend, ist es möglich, auch den historischen Gesichtspunkt stärker in den Vordergrund treten zu lassen. Im folgenden soll ein Hauptthema der Frühzeit der Eulerschen Reihenlehre, nämlich die berühmte Summenformel, in ihrer Entwicklungsgeschichte etwas näher verfolgt werden. Hierbei kann ich mich dank des liebenswürdigen Entgegenkommens von Herrn O. Spiess-Basel, dem Herausgeber der Bernoulli-Ausgabe, und von Herrn P. Juschkewitsch-Moskau, dem Sekretär der Euler-Kommission der Moskauer Akademie der Wissenschaften, auf noch unediertes Material stützen, dessen Existenz erst seit kurzem bekannt geworden ist. Ich möchte nicht versäumen, diesen beiden Herren, sowie Herrn K.-R. Biermann-Berlin, der die Verbindung zu Herrn Juschkewitsch übernommen hat, und Herrn K. Haas-Heidelberg, der mir wichtige Auszüge aus schwer zugänglichen älteren Werken zur Verfügung gestellt hat, meinen tiefempfundenen Dank für die empfangene Unterstützung auszusprechen.

[1]) Wallis, J.: *Arithmetica infinitorum*, Oxford „1655" = *Opera mathematica* I, Oxford 1695. Das Ausgabejahr des Erstdruckes ist nach der englischen Jahreszählung gerechnet, die den 25. 3. als Jahresanfang nimmt. Nach der festländischen Jahreszählung mit dem Jahreswechsel am 1. 1. ist das Ausgabejahr 1656. Euler dürfte nicht den verhältnismäßig seltenen Erstdruck verwendet haben, sondern den viel häufigeren Nachdruck

[2]) Euler, L.: *Opera mathematica* (1) XIV/XVI: *Commentationes analyticae ad theoriam serierum pertinentes*, Leipzig-Berlin-Zürich-Basel 1924/35. im folgenden zitiert als *EO* mit Bandnummer und nachfolgender Seitenzahl.

[3]) *EO* XVI*, S. VII/CXII.

2. Die erste Abhandlung Eulers zur Reihenlehre[4]), im Eneströmschen Schriftenverzeichnis[5]) als Nummer 19 = [E 19] bezeichnet, enthält noch nicht viel Bedeutendes, wohl aber den weittragenden und dann von Euler konsequent zur Anwendung gebrachten Gedanken, Reihenglieder durch bestimmte Integrale auszudrücken und Reihensummen durch bestimmte Integrale in „geschlossener Form" darzustellen[6]). Diese Abhandlung ist in Weiterbildung einer Studie Chr. Goldbachs über rekurrente Reihen[7]) entstanden. Kennzeichnend ist etwa die Definition des natürlichen Logarithmus aus $\frac{1-x^0}{0} = -\ln x$, die wahrscheinlich nicht selbständig[8]) ist.

Aus E 20, der zweiten Abhandlung Eulers zur Reihenlehre[9]), ist die Art bemerkenswert, wie Euler die Summe $s_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ aus $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\cdot dt}{-t}$ erklärt — hierbei vielleicht einer mündlichen Anregung aus Joh. Bernoullis Unterweisungen in Basel folgend[10]). Durch Zerspalten des Integrals in die

[4]) *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt: Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* [= *CP*] **5** (1730/31), 1738 = *EO* XIV, S. 1/24, der Akademie am 28. 11. 1729 a. St. vorgelegt.

[5]) Eneström, G.: *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, Leipzig 1910/13 = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Erg.-Bd. IV.

[6]) Dan. Bernoulli berichtet übrigens im Brief vom 7. 3. 1742 an Euler, er habe sich schon vor seiner Wirksamkeit in Petersburg (1725/33) ebenfalls mit der Herstellung summierbarer Reihen (in geschlossener Form) unter Verwendung von Differentiationen und Integrationen beschäftigt. Im nächsten Brief an Euler vom 14. 4. 1742 gesteht er allerdings, nachdem er die unten zu erwähnende Abhandlung[15]) E 41 aus *CP* **7** (1734/35), 1740 gesehen hatte: „Ich sehe nun freylich, daß Sie die differentiationes und integrationes serierum anders nehmen, und zwar auf eine viel nützlichere und ingeniosere Weise als ich." ... Die erwähnten Briefstellen finden sich in P.-H. Fuss: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^ème siècle* II, Petersburg 1843, S. 487/88 und 493.

[7]) Goldbach, Chr.: *De terminis generalibus serierum*, *CP* **3** (1728), 1732, S. 164/73.

[8]) Die gleichwertige Definition $\ln(1+t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+t)^{1/n}-1}{1/n}$ findet sich in E. Halley: *A most compendious and facile Method for constructing the Logarithmes ...*, *Philosophical Transactions* [= *PT*] **19**, Nr. 216 für III/V 1695, S. 88/97. Dort wird erstmals der (allerdings nur formal geglückte) Versuch unternommen, die logarithmische Reihe als Grenzfall der binomischen Reihe anzusehen und hieraus den Logarithmus auf algorithmischem Wege zu erklären. Es ist kaum wahrscheinlich, daß Euler direkt an diesen Aufsatz anschließen konnte; die unmittelbare Vorlage ist nicht feststellbar.

[9]) *De summatione innumerabilium progressionum*, *CP* **5** (1730/31), 1738 = *EO* XIV, S. 25/41, der Akademie am 5. 3. 1731 a. St. vorgelegt.

[10]) Schon Leibniz hatte im Brief vom 9. [19.] 11. 1696 (d.i. 9. 11. a. St. = 19. 11. n. St.) an Joh. Bernoulli festgestellt, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)\cdot dt}{-t}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)\cdot dt}{t}$ ist. Vgl. Leibnizens *Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, Bd. III, Halle 1855, S. 337. Fast gleichzeitig und unabhängig von Leibniz kam Jak. Bernoulli zur nämlichen Integraldarstellung für die beiden Summen: *prop.* 44 der

beiden Bestandteile

$$\int_0^x \cdots = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots \quad \text{und} \quad \int_x^1 \cdots = \ln x \cdot \ln y + \int_0^y \frac{\ln(1-t)\cdot dt}{-t}$$

mit $x+y=1$ führt er die numerische Bestimmung von s_2 mit $x=y=\frac{1}{2}$ zurück auf

$$1 + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^3\cdot 4^2} + \cdots + (\ln 2)^2.$$

Euler interessiert sich — wohl im Zusammenhang mit ähnlichen Versuchen[11]) Goldbachs und Dan. Bernoullis, über die er nur andeutungsweise unter-

---

dritten Reihendissertation vom 14. [24.] 11. 1696, Wiederdruck im Anhang zur nachgelassenen *Ars conjectandi*, die 1713 zu Basel unter Mitwirkung von Nikl. I. Bernoulli gedruckt wurde.

[11]) Schon 1723 beginnt die Diskussion zwischen den beiden Freunden um den (geschlossenen) Summenwert von s_2. Dan. Bernoulli verweist im Brief vom 2. 10. 1723 [Fuss[6]) II, S. 180/81] auf Jak. Bernoullis erste Reihendissertation vom 7. [17.] 6. 1689, woselbst der Autor in einer Ergänzung zu *prop.* 17 bemerke, er habe trotz erheblicher Anstrengungen s_2 nicht bestimmen können. In seiner Antwort vom 4. 11. 1723 berichtet Goldbach über seine ersten Reihenstudien und erwähnt, er besitze die *Ars conjectandi*[10]), habe aber früher bei der Durcharbeit große Schwierigkeiten gehabt. Er halte die Summierung von s_2 für nicht einfacher wie die Kreisquadratur (Fuss, S. 185).

Das ungelöste Problem erscheint wieder im Jahre 1728. Jetzt steht die numerische Approximation im Vordergrund. Am 29. 8. [9. 9.] 1728 schreibt Dan. Bernoulli, er habe eine kurze Methode zur Berechnung von s_2 gefunden, aus der $s_2 \approx \frac{8}{5}$ folge (Fuss, S. 263/64). Später muß er angedeutet haben, daß $s_2 - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2(\nu+1)}$ ist (erkennbar aus Goldbachs Schreiben vom 2. 10. 1730: Fuss, S. 395). Den Beweis führt er im Brief vom 8. [19.] 10. 1730 (Fuss, S. 398) auf Grund der Umformung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\nu+1)^2} - \frac{1}{\nu^2(\nu+1)} \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{\nu}{(\nu+1)^2} - \frac{\nu-1}{\nu^2} \right\} = 0.$$

Die einfachere Umformung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2(\nu+1)} \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right\} = 1$$

scheint ihm entgangen zu sein. Die Näherung $\frac{8}{5}$ folgt durch Berücksichtigung der ersten drei Glieder der neuen Reihe:

$$s_2 > 1 + \frac{1}{1^2\cdot 2} + \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 4} = \frac{29}{18} > \frac{8}{5}.$$

Dazwischen schieben sich die Verfahren Goldbachs. Dieser verwendet im Schreiben vom 31. 1. 1729 (Fuss, S. 281/82) die Ungleichungen

$$\frac{256}{(16\nu-7)(16\nu+9)} < \frac{1}{\nu^2} < \frac{4}{(2\nu-1)(2\nu+1)} \quad \text{für} \quad \nu > 1$$

richtet worden sein mag — auch für die reine Zahlenrechnung. Zur Berechnung von $\ln 2$ bedient er sich nicht der zweckmäßigsten Form aus $\ln \frac{3+1}{3-1}$, die er ersichtlich noch nicht kennt[12]), sondern der aus $\ln \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ folgenden, die er aus Wallis haben dürfte[13]). Vielleicht ist Euler bei dieser Gelegenheit auf den Gedanken gekommen, es an Stelle von $(\ln 2)^2$ mit einer Näherung zu versuchen, die in etwa mit dem in seinem Sinne zu $(\ln 2)^2$ gleichwertigen Ausdruck π^2 zusammenhängt[14]), und mag sich auf diesem Wege den Zugang zu der berühmten Darstellung von s_2 durch $\frac{1}{6}\pi^2$ gebahnt haben[15]).

3. Die numerische Berechnung von Reihensummen, deren ν-tes Glied $t(\nu)$ als geschlossener Ausdruck von ν angesehen werden kann: das ist zunächst Eulers Ziel. Auf diesem Gebiet gelingt ihm dann der erste große Erfolg, nämlich die Aufstellung der Summenformel[16]) in E 25. Sie erscheint dort in der Form $s = \int t \cdot dn + \alpha t + \beta \frac{dt}{dn} + \gamma \frac{d^2t}{dn^2} + \cdots$.

Hier ist unter s die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe zu verstehen. Die konstanten Zahlenkoeffizienten werden aus den Rekursionsformeln $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{24}$ usw. festgestellt. Euler ist sich übrigens zu diesem Augenblick noch keineswegs über die Tragweite seiner Formel im klaren; er glaubt eine spezielle Summenformel vor sich zu haben und

---

und findet durch Summieren

$$\frac{16}{16n-7} < \sum_{\nu=n}^{\infty} < \frac{2}{2n-1}.$$

Er berechnet zuerst die ersten 6, dann die ersten 11 Glieder von s_2 und schätzt die Reste vermittels der soeben angegebenen Schranken ab. Die sich ergebenden Näherungswerte unterscheiden sich im zweiten Fall nur mehr um drei Einheiten der 4. Dezimale.

Dazu tritt Goldbachs Bemerkung, $s_2 - 1$ lasse sich auch in der Form

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + 0 + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + 0 + 0 + \frac{1}{10^2-1} + \cdots$$

darstellen (Fuss, S. 283). Dan. Bernoulli hält diese Entwicklung nicht für richtig. Nach längerer Diskussion deutet Goldbach in einem Brief vom April 1729 das einzuschlagende Beweisverfahren an (Fuss, S. 296). Einen Beweis unter Bezugnahme auf Goldbachs Reihe veröffentlichte Euler in E 72: *Variae observationes circa series infinitas*, *CP* 9 (1737), 1744 = *EO* XIV, S. 216/44, insbesondere S. 226/27.

[12]) Die Berechnung natürlicher Logarithmen in der Form $\ln \frac{a+x}{a-x}$ erscheint erstmals im Druck in J. Gregory: *Exercitationes geometricae*, London 1668, S. 9/13 und ist von hier in Halleys Aufsatz [8]) übergegangen.

[13]) Es handelt sich um die Note in den *PT* 3, Nr. 38 vom 17. [27.] 8. 1668, S. 753/56, die auch in Wallis' *Opera*[1]) übergegangen ist.

[14]) Entsprechung der logarithmischen Reihe mit jener für den Arcus Tangens.

[15]) Die erste Darstellung findet sich in der Abhandlung E 41: *De summis serierum reciprocarum*, *CP* 7 (1734/35), 1740 = *EO* XIV, S. 73/86, der Petersburger Akademie am 5. 12. 1735 a. St. vorgelegt, jedoch nicht abgeliefert.

[16]) *Methodus generalis summandi progressiones*, *CP* 6 (1732/33), 1738 = *EO* XIV, S. 42/72, der Akademie am 30. 6. 1732 a. St. vorgelegt.

$t(\nu)$ als ganzrationale Funktion von ν ansehen zu müssen. Deshalb beschränkt er sich auf das triviale Beispiel $t = \nu^2 + 2\nu$ und fährt dann mit einer großen Zahl anderer spezieller Summenverfahren fort, die heute kaum mehr interessieren. Eines davon bezieht sich auch auf die Teilreihen der harmonischen Reihe und führt nahe an den Begriff der Eulerschen Konstanten heran.

4. Diese Konstante wird erstmals genauer in der Abhandlung[17]) E 43 bestimmt. Hier geht Euler aus von einer Teilreihe der harmonischen Reihe, schätzt deren Summe arithmetisch unter Verwendung des mittleren Gliedes bzw. des arithmetischen Mittels der äußeren Glieder ab, vergleicht die Reihensumme mit dem natürlichen Logarithmus des Quotienten aus dem Anfangsglied und dem Schlußglied und findet schließlich[18])

$$\ln p = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{np} \frac{1}{\nu}.$$

Daraus erhält er dann durch kühne Schlüsse (formales Rechnen mit bedingt konvergenten Reihen) Darstellungen für ln 2, ln 3, ln 4, ln 5, ln 6, ... Hierauf summiert er

$$\ln \frac{\nu+1}{\nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\nu^2} + \frac{1}{3\nu^3} \mp \cdots$$

und erhält

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln(n+1) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^3} \pm \cdots.$$

Ohne die Einzelrechnung auszuführen, stellt er fest, daß das rechts stehende Aggregat mit $n \to \infty$ die Summe $C = 0{,}577218$ hat.

---

[17]) *De progressionibus harmonicis observationes*, *CP* **7** (1734/35), 1740 = *EO* XIV, S. 87/100, der Akademie am 11. 3. 1734 a. St. vorgelegt.

[18]) Euler hatte keine Ahnung davon, daß schon in P. Mengoli: *Geometria speciosa*, Bologna 1659, die auf der Treppenmethode beruhenden Ungleichungen

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np} < \ln p < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{np-1}$$

erscheinen, aus denen die Eulersche Formel sogleich durch Grenzübergang hervorgeht. Wahrscheinlich hatte er aber erfahren (brieflicher Hinweis von Herrn O. Spiess), daß Joh. II. Bernoulli, der damals 19jährige Sohn Joh. I. und jüngere Brüder Dan. Bernoullis, die Teilreihen der harmonischen Reihe durch einen geschlossenen Ausdruck angenähert hatte. Über diese Angelegenheit, von der Dan. Bernoulli im Frühjahr 1729 unterrichtet worden sein muß, wurde nämlich auch Goldbach informiert. Der fragliche Brief Dan. Bernoullis trägt nach Fuss[6]), S. 250 das Datum 20. 2. 1728 a. St. Hier muß jedoch ein Lesefehler bezüglich der Jahreszahl vorliegen. Das richtige Datum ist wohl der 3. 3. 1729 n. St. Der Brief bezieht sich nämlich auf Fragen, die erst im Jahr 1729 zwischen Dan. Bernoulli und Goldbach verhandelt wurden.

Dan. Bernoulli hat die erhaltenen Andeutungen aus Basel sofort verstanden, wie das aus dem Hinweis bei Fuss, S. 252/53 hervorgeht. Ein späterer Bericht Dan. Bernoullis an Goldbach vom 28. 4. [9. 5.] 1729 (Fuss, S. 300/01) bestätigt dies. Auch Goldbach merkt, daß es sich um die Verwendung von Logarithmen handeln müsse: Brief an Dan. Bernoulli vom April 1729 (Fuss, S. 296/97).

5. In der Abhandlung[19]) E 46 wird das Summenproblem von ganz anderer Seite aus angegriffen. Euler geht aus von einer summierbaren (endlichen oder unendlichen) Reihe mit lauter positiven Gliedern, deren ν-tes Glied wiederum als angebbarer Ausdruck $t(\nu)$ hingeschrieben werden kann. Er zeichnet die durch $y=t(x)$ und $z=t(x+1)$ bestimmten Kurven und nähert die Summe $s=\sum_{\nu=1}^{n} t(\nu)$ unter Verwendung der Treppenregel durch die anschaulich gedeuteten Integrale $\int_0^n y\cdot d\nu$ und $\int_1^{n+1} z\cdot d\nu$ an[20]). Zuerst verbessert er die Schranken durch Übergang zur Trapezmethode, dann unter Mitverwendung von Strecken, die sich nur wenig von den Tangenten an die beiden gezeichneten Kurven in den gegebenen Kurvenpunkten unterscheiden:

$$s=\int_1^{n+1} t(\nu)\,d\nu+\frac{t(1)-t(n)}{2}+\frac{t(1)-t(2)}{12}-\frac{t(n+1)-t(n+2)}{12}.$$

Daraus gewinnt er sehr gut brauchbare Näherungen für die Teilreihen der harmonischen Reihe. Zum Beispiel berechnet Euler die Summe der ersten 10 Glieder $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}$ direkt, setzt dann $t(\nu)=\frac{1}{n+\nu}$ und erhält mit $n=999990$ einen bis auf 2 Einheiten der 4. Dezimale richtigen Näherungswert[21]) für die Summe aus der ersten Million der Glieder der harmonischen Reihe. Das Ganze dient auch zu einer neuen und rechnerisch besser überblickbaren numerischen Bestimmung der Konstanten C. Ist die Reihe sogar absolut konvergent, dann kann Euler mit $n\to\infty$ die Glieder $t(n)$, $t(n+1)$, $t(n+2)$ in seiner Formel weglassen. Beispiel: er berechnet die ersten 10 Glieder der Summe s_2, erhält $\int_{11}^{\infty} t(\nu)\cdot d\nu=\frac{1}{11}$ und einen bis auf 2 Einheiten der 5. Dezimale richtigen Zahlenwert von s_2.

6. An diesen speziellen Ergebnissen erkennt Euler, daß seine Summenformel nicht nur auf Reihen beschränkt ist, deren Glieder $t(\nu)$ ganzrationale Funktionen der Gliederzahl ν sind. Sie ist auch dann verwendbar, wenn $t(\nu)$ als Taylor-Reihe dargestellt werden kann, also im Sinne der Eulerschen Auffassung allgemein. Das ist der wesentliche Inhalt der Abhandlung[22])

[19]) *Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi*, *CP* **8** (1736), 1741 = *EO* XIV, S. 101/07, der Akademie am 9. 6. 1735 a. St. vorgelegt.

[20]) Stillschweigend wird vorausgesetzt, daß die Reihenglieder monoton abnehmen und zwar so, daß auch $t(\nu+1)-t(\nu)>t(\nu)-t(\nu-1)$ ist.

[21]) Die im Brief an Joh. Bernoulli vom 20. 6. [1. 7.] 1740 gemachten Mitteilungen Eulers über seine neuen Ergebnisse — abgedruckt in G. Enestrom: *Der Briefwechsel zwischen L. Euler und Joh. I. Bernoulli*, Abt. III, *Bibl. math.* (3) **6**, 1904, S. 62/67 — führen zu Joh. Bernoullis Antwort vom 31. 8. 1740. Hier tut Joh. Bernoulli so als habe er die Ergebnisse Eulers aus eigener Kraft nacherfunden [Fuss[6]), S. 45/47]. In Wirklichkeit hat er sich jedoch nur das Verfahren seines Sohnes Joh. II. angeeignet. Siehe oben[18]).

[22]) *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali*, *CP* **8** (1736), 1741 = *EO* XIV, S. 108/23, der Akademie am 13. 10. 1735 a. St. vorgelegt.

E 47. Jetzt erst wird die Summenformel bewiesen, und zwar vermittels des Taylorschen Lehrsatzes. Die Art, wie die nachfolgenden Summen $\sum_{v=1}^{n} v^k$ $(k = 1, 2, \ldots, 16)$ hingeschrieben werden, zeigt uns, daß Euler die *Ars conjectandi*[10]) Jak. Bernoullis noch immer nicht kennt[23]). Die weiteren Beispiele (Eulersche Konstante, Partialsummen der harmonischen Reihe, numerische Berechnung von s_2, s_3 und s_4) gehen nicht mehr über das nunmehr zu Erwartende hinaus.

7. In dieser Abhandlung bricht Euler die Summenformel mit dem Glied bei der 15. Ableitung ab, gibt jedoch 20 richtige Dezimalen von s_2. Daraus schließt Herr Faber[24]), bei der endgültigen Redaktion der Abhandlung E 47 müsse Euler bereits im Besitz des geschlossenen Ausdrucks für s_2 gewesen sein. Diese Ansicht kann ich nunmehr durch weiteres Material stützen.

In der nächstfolgenden Abhandlung[25]) E 55 wird die Summenformel bis zum Glied mit der 17. Ableitung fortgesetzt, aber gerade an dieser Stelle steht im Originaldruck eine unrichtige Zahl. Das könnte ein Druckfehler sein, kein Rechenfehler. Dem ist aber nicht so. Am 8. [19.] 6. 1736 hat nämlich Euler einen Brief an J. Stirling geschrieben, auf dessen *Methodus differentialis*[26]) er durch die eingehende Anzeige in den *Nova Acta Eruditorum*[27]) aufmerksam geworden war und in der er dann bei genauer Durchsicht drei ausgezeichnete numerische Verfahren zur Bestimmung von s_2 vorgefunden hatte[28]). In diesem bisher noch unedierten Brief[29]) teilt Euler neben dem geschlossenen Ausdruck für s_2 und anderem auch die Summenformel mit,

---

[23]) Dort sind nämlich auf S. 96/98 nicht nur die Summen für $k = 1, 2, \ldots, 10$ angegeben, sondern auch das allgemeine Bildungsgesetz erscheint:

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{v^k} = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{1 \cdot 2} + A \cdot \frac{k\, n^{k-1}}{2} + B \cdot \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\, n^{k-3} + \cdots .$$

Daraus hätte Euler seine Summenformel unmittelbar ablesen können. Sicherlich hätte Euler schon damals auf Jak. Bernoulli hingewiesen, wenn er die fragliche Stelle gekannt hätte. Später hat er das Versäumte ausdrücklich nachgeholt: Abhandlung E 393: *De summis serierum numeros Bernoullianos involventium*, *Novi CP* **14** (1769) I, 1770 = *EO* XV, S. 91/130. Die Abhandlung wurde der Petersburger Akademie am 18. 8. 1768 a. St. vorgelegt.

[24]) *EO* XVI*, S. XXII.

[25]) *Methodus universalis series summandi ulterius promota*, *CP* **8** (1736), 1741 = *EO* XIV, S. 124/37, der Akademie am 17. 9. 1736 vorgelegt.

[26]) J. Stirling: *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730.

[27]) Novemberheft des Jahrganges 1734, S. 515/26.

[28]) Stirling[26]), *prop.* 2, Beispiel 6 (S. 28/29); 9 richtige Dezimalen von s_2, ferner *prop.* 11, Beispiel 1 (S. 54/55; 17 richtige Dezimalen) und *prop.* 12, Beispiel 2 (S. 64/66; wiederum 17 richtige Dezimalen).

[29]) Das Original dieses Briefes ist verschollen, wir haben jedoch eine für die Akademie angefertigte Abschrift (Archiv der Moskauer Akademie), weil Euler in deren Auftrag an Stirling schrieb und auch den Brief schon vor der Abfertigung am 4. [15.] 6. 1736 zur Genehmigung vorlegte.

und zwar mit genau dem nämlichen Zahlenfehler, den der Erstdruck von E 55 enthält. Dieser Fehler hätte die Wiedergabe von 20 richtigen Dezimalen verhindert! Also kann die Berechnung von s_2 in E 47 nicht vermittels der Summenformel vorgenommen worden sein.

Übrigens hat Euler seinen Irrtum alsbald bemerkt. Schon im zweiten Brief an Stirling vom 27. 7. [7. 8.] 1738 findet sich der richtige Wert vor[30]). Wir sehen übrigens hieraus, daß schon 1738 keine Möglichkeit mehr bestand, den bereits zum Teil ausgedruckten Band 8 der *Commentarii* textlich zu verändern, obwohl der Band erst 1741 ausgegeben wurde. Unklar bleibt freilich, warum keine Berichtigung am Ende des Bandes vorgenommen wurde.

8. Im Vorstehenden wurde versucht, das Hauptsächlichste über die Entstehungsgeschichte der Eulerschen Summenformel in gedrängter Form wiederzugeben. Noch ist manches ungeklärt, was wohl erst bei Herausgabe des gesamten Euler-Briefwechsels in helleres Licht gesetzt werden kann. Erst dann, wenn das noch unedierte Briefmaterial im Druck zugänglich und mit den nötigen Registern versehen ist [die z.B. beklagenswerter Weise in der *Correspondance*[6]) von Fuss fehlen], wird sich der Werdegang des Eulerschen Genius wirklich erkennen lassen — eine Angelegenheit, die mir von höchstem psychologischem Interesse zu sein scheint.

[30]) Das Original ist abgedruckt in Ch. Tweedie: *J. Stirling, a sketch of his life and works along with his scientific correspondence*, Oxford 1922, S. 181/91. Die fragliche Stelle befindet sich auf S. 183. Dort ist auch noch das Glied mit der 19. Ableitung richtig wiedergegeben. Im Druck ist der Fehler erstmals berichtigt in den *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Berlin 1755 (E 212 von 1748) = *EO* X, ed. G. Kowalewski, Leipzig-Berlin 1913, S. 320.

(13b) Ichenhausen/Schw., Heinr. Sinzstr. 15

(Eingegangen am 29. September 1956)

Lense, J.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 147—152 (1957)

Bemerkungen zur Verwendung der Elementarteiler bei Paaren von nicht zerfallenden Kegelschnitten

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Josef Lense

Um die Theorie der Elementarteiler auf Kegelschnittspaare oder Kegelschnittsbüschel anwenden zu können, genügt es nicht, nur zu beweisen, daß zwei λ-Matrizen ersten Grades dann und nur dann äquivalent sind (d.h. auseinander durch linksseitige und rechtsseitige Multiplikation mit Matrizen hervorgehen, deren Elemente von λ nicht abhängen und deren Determinanten nicht verschwinden), wenn sie gleiche Elementarteiler besitzen; sondern man hat darüber hinaus noch zu zeigen, daß bei symmetrischen λ-Matrizen die beiden multiplizierenden Matrizen außerdem noch so gewählt werden können, daß die eine die transponierte der anderen ist. Beides erfordert immerhin einen nicht unbeträchtlichen Aufwand an Beweismitteln. So bedarf man z.B. zum Beweis des zweiten, sich auf symmetrische Matrizen beziehenden Teils der Behauptung der Tatsache, daß man, kurz gesagt, aus einer Matrix die Quadratwurzel ziehen kann, oder genauer ausgedrückt, daß sich zu einer Matrix, deren Determinante nicht verschwindet, eine ebensolche gleicher Ordnung angeben läßt, deren Quadrat die gegebene Matrix ist[1]).

Es dürfte daher von Vorteil sein, wenn es sich z.B. für Vorlesungszwecke nur um die projektive Einteilung der Kegelschnittspaare mit Hilfe ihrer Elementarteiler handelt, einen kürzeren Weg aufzufinden. Ein solcher soll im folgenden angegeben werden.

§ 1

Wir betrachten eine sog. λ-Matrix ersten Grades, d.h. eine Matrix von der Gestalt $\|a_{\mu\nu}+\lambda b_{\mu\nu}\|$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$, wobei die $a_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$ beliebige komplexe Zahlen sind und λ ein komplexer Parameter sein soll.

Ihre r-reihigen Unterdeterminanten sind Polynome in λ mit einem Grad $\leqq r$. Wir wollen ihren größten gemeinsamen Teiler so normieren, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von λ gleich 1 wird. Dann ändert sich bekanntlich[2]) dieser größte gemeinschaftliche Teiler nicht, wenn wir die λ-Matrix links oder rechts mit einer Matrix $\|c_{\mu\nu}\|$ multiplizieren, wobei auch die $c_{\mu\nu}$ komplexe Zahlen mit nicht verschwindender Determinante sein sollen.

---

[1]) Siehe z.B. Bôcher, M.: Einführung in die höhere Algebra, S. 282—336. Deutsch von H. Beck. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1910.

[2]) Siehe z.B. M. Bôcher, a. a. O., S. 297.

Es seien jetzt die $a_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$ die Koeffizienten der Gleichungen zweier nicht zerfallenden Kegelschnitte in homogenen Dreieckskoordinaten der komplexen projektiven Ebene $\sum_{\mu,\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$ und $\sum_{\mu,\nu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$, die aus ihnen gebildeten Determinanten also von Null verschieden und $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$. Üben wir auf die x_μ eine lineare homogene Transformation mit nicht verschwindender Determinante aus, $x_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu} x'_\nu$ $(\mu = 1, 2, 3)$, wir können sie als Kollineation oder Koordinatentransformation deuten, so entsteht die Matrix der Koeffizienten in den Koordinaten x'_μ aus der alten, in dem man rechts mit der Matrix $\|c_{\mu\nu}\|$ und links mit ihrer transponierten multipliziert. Dabei ändert sich, wie eben erwähnt, der entsprechend normierte größte gemeinsame Teiler der r-reihigen Unterdeterminanten der λ-Matrix $\|a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu}\|$ nicht.

§ 2

Wir wollen nun die einzelnen Fälle durchgehen.

1. Die Elemente $a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu}$ haben einen gemeinsamen Teiler. Weil sie vom Grad 1 in λ sind, hat er die Gestalt $\lambda - \alpha$. Die Unterdeterminanten haben daher den größten gemeinsamen Teiler $(\lambda - \alpha)^2$, die Determinante selbst ist bis auf einen von λ unabhängigen Faktor $(\lambda - \alpha)^3$.

2. Die Elemente $a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu}$ haben keinen gemeinsamen Teiler, wohl aber die Unterdeterminanten einen solchen ersten Grades $\lambda - \alpha$. Dieser ist nach dem Entwicklungsatz der Determinanten auch Teiler der Determinante, sie ist also bis auf einen von λ unabhängigen Faktor von der Gestalt $(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$. Weil aber die Determinante der Unterdeterminanten einerseits durch $(\lambda - \alpha)^3$ teilbar, andererseits dem Quadrat der ursprünglichen Determinante gleich, somit bis auf einen von λ unabhängigen Faktor $(\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^2 (\lambda - \gamma)^2$ ist, muß entweder $\alpha = \beta \neq \gamma$ oder $\alpha = \beta = \gamma$ sein.

3. Die Elemente haben keinen gemeinsamen Teiler, die Unterdeterminanten einen solchen zweiten Grades $(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$. Dieser Fall kann nicht eintreten. Denn dann wäre die Determinante der Unterdeterminanten bis auf einen von λ unabhängigen Faktor $(\lambda - \alpha)^3 (\lambda - \beta)^3$. Da aber diese Determinante das Quadrat der ursprünglichen, also bis auf einen von λ unabhängigen Faktor $(\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^2 (\lambda - \gamma)^2$ ist, müßte $\gamma = \beta = \alpha$ sein. Bildet man nun die Unterdeterminanten der Determinante der Unterdeterminanten, so wären diese einerseits bis auf einen von λ unabhängigen Faktor von der Gestalt $(\lambda - \alpha)^4$, andererseits nach einem bekannten Determinantensatz[3]) bis auf einen von λ unabhängigen Faktor von der Gestalt $(a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu})(\lambda - \alpha)^3$, was unmöglich ist, da die Elemente $a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu}$ nach Voraussetzung keinen gemeinsamen Teiler haben.

4. Die Elemente und die Unterdeterminanten haben keinen gemeinsamen Teiler, die Determinante ist bis auf einen von λ unabhängigen Faktor von der

[3]) Siehe z. B. M. BÔCHER, a. a. O., S. 33.

Gestalt $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$, wobei insbesondere auch $\alpha=\beta\neq\gamma$ oder $\alpha=\beta=\gamma$ sein kann.

Man erkennt demnach, daß in allen möglichen Fällen immer der größte gemeinsame Teiler der Unterdeterminanten durch den größten gemeinsamen Teiler der Elemente und die Determinante durch den größten Teiler der Unterdeterminanten teilbar ist. Die hierbei auftretenden Quotienten und den größten gemeinsamen Teiler der Elemente bezeichnet man, wenn sie von λ wirklich abhängen, als invariante Faktoren der λ-Matrix, die Potenzen der verschiedenen Linearfaktoren in den invarianten Faktoren als Elementarteiler.

Nach der eben durchgeführten Fallunterscheidung sind demnach folgende sechs Fälle möglich:

1. Elemente und Unterdeterminanten haben keinen gemeinsamen Teiler, die Determinante ist von der Gestalt $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ mit paarweise verschiedenen α, β, γ, die Elementarteiler sind $\lambda-\alpha, \lambda-\beta, \lambda-\gamma$.

2. Wie bei 1., aber mit $\alpha=\beta$, die Elementarteiler sind $(\lambda-\alpha)^2, (\lambda-\gamma)$.

3. Wie bei 1., aber mit $\alpha=\beta=\gamma$, ein einziger Elementarteiler $(\lambda-\alpha)^3$.

4. Die Elemente haben keinen gemeinsamen Teiler, die Unterdeterminanten den größten gemeinsamen Teiler $\lambda-\alpha$, die Determinante ist von der Gestalt $(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ mit $\beta\neq\alpha$ die Elementarteiler sind $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha, \lambda-\beta$.

5. Wie bei 4., aber mit $\beta=\alpha$, die Elementarteiler sind $\lambda-\alpha, (\lambda-\alpha)^2$.

6. Die Elemente haben den größten gemeinsamen Teiler $\lambda-\alpha$, die Unterdeterminanten $(\lambda-\alpha)^2$, die Determinante ist von der Gestalt $(\lambda-\alpha)^3$, die Elementarteiler sind $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha, \lambda-\alpha$.

§ 3

Nach den vorhergegangenen Erörterungen ändern sich die invarianten Faktoren und Elementarteiler nicht, wenn man die λ-Matrix mit einer Matrix $\|c_{\mu\nu}\|$ multipliziert, deren Determinante von Null verschieden ist, also z.B. wenn man auf die Koordinaten x_μ eine homogene lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante ausübt, d.h. die Kegelschnittspaare einer Kollineation oder Koordinatentransformation unterwirft. Da es aber dabei nicht auf die quadratischen Formen, sondern nur auf die Gleichungen des Kegelschnittpaares ankommt, also die Koordinaten x_μ in den beiden Kegelschnittsgleichungen noch je mit einem bei beiden Gleichungen verschiedenen Proportionalitätsfaktor ϱ_1 bzw. ϱ_2 multipliziert werden können, hat die Matrix nach der Transformation die Gestalt $\left\| \sum_{\sigma,\tau=0}^{3} c_{\sigma\mu}(\varrho_1^2 a_{\sigma\tau}+\lambda\varrho_2^2 b_{\sigma\tau})c_{\tau\nu}\right\|$, d.h. die Konstanten α, β, γ der Elementarteiler werden alle gleichzeitig mit einem gemeinsamen Faktor $\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2$ multipliziert. Projektive Invarianten des Kegelschnittpaares sind hiernach die Exponenten der Elementarteiler und die Gleichheit oder Verschiedenheit der Größen α, β, γ, die Größen selbst nur bis auf einen gemeinsamen Faktor.

Man hat daher folgende sechs Fälle zu unterscheiden:

1. Drei paarweise verschiedene Elementarteiler, Bezeichnung (die sog. Charakteristik) [1 1 1].

2. Das Quadrat eines linearen Elementarteilers und ein davon verschiedener linearer Elementarteiler, [2 1].

3. Der Kubus eines linearen Elementarteilers, [3].

4. Zwei gleiche lineare und ein davon verschiedener linearer Elementarteiler, [(1 1) 1].

5. Ein linearer Elementarteiler und sein Quadrat, [(2 1)].

6. Drei gleiche lineare Elementarteiler, [(1 1 1)].

Ihnen entsprechen sechs Klassen von Kegelschnittspaaren in der Weise, daß bei einer projektiven Transformation die Kegelschnittspaare einer Klasse immer in solche derselben Klasse übergehen.

Diese sechs Klassen lassen sich aber auch geometrisch durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Paares kennzeichnen. Um zu den Schnittpunkten, also analytisch gesprochen, zu den Lösungen der beiden homogenen Gleichungen zweiten Grades zu gelangen, durch welche die beiden Kegelschnitte gegeben sind, kann man, ohne den Begriff der Resultante oder das Theorem von BÉZOUT heranziehen zu müssen, in folgender Weise vorgehen: Durch passende Wahl des Koordinatendreiecks und des Einheitspunktes läßt sich erreichen, daß die Gleichung des einen Kegelschnittes die Form $x_1 x_2 = x_3^2$ annimmt. Berechnet man aus dieser Gleichung $x_1 = \frac{x_3^2}{x_2}$ und setzt diesen Wert in die Gleichung des zweiten Kegelschnitts ein, so ergeben sich eine Gleichung vierten Grades für das Verhältnis $x_2 : x_3$ und damit, je nach den Lösungsmöglichkeiten dieser Gleichung, folgende sechs Fälle für die gegenseitige Lage der beiden Kegelschnitte:

1. Vier getrennte Schnittpunkte.

2. Zwei der vier Schnittpunkte fallen zusammen.

3. Drei der vier Schnittpunkte fallen zusammen.

4. Je zwei der vier Schnittpunkte fallen zusammen.

5. Alle vier Schnittpunkte fallen zusammen.

6. Die beiden Kegelschnitte haben sämtliche Punkte gemeinsam.

Bei projektiver Transformation bleiben die sechs Klassen getrennt, d.h. Kegelschnittspaare einer solchen Klasse gehen wieder in Paare derselben Klasse über. Sie entsprechen den obigen sechs Fällen der Elementarteiler. Wir können nämlich in jeder der sechs Schnittpunktsklassen die Gleichungen irgendeines Kegelschnittspaares durch eine passende Koordinatentransformation auf eine geeignete Normalform bringen, wobei sich nach dem Obigen die Charakteristik nicht ändert. Für jede der sechs Normalformen stellt sich genau eine der sechs Charakteristiken heraus.

§ 4

1. Wir wählen das zu dem vollständigen Viereck der vier Schnittpunkte gehörige Diagonaldreieck als Koordinatendreieck. Bei passender Wahl des Einheitspunktes ergibt sich das Gleichungspaar $x_1^2+x_2^2=x_3^2$, $a x_1^2+b x_2^2=x_3^2$, wobei die Konstanten a und b von 0 und 1 und untereinander verschieden sind. Sie lassen sich nicht weiter normieren, sind also projektive Invarianten. Man erhält nämlich für das Doppelverhältnis d_1 der vier Schnittpunkte der Geraden $x_1=0$ mit den beiden Kurven $d_1=\left(\frac{1+\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}\right)^2$, also $b=\left(\frac{1-\sqrt{d_1}}{1+\sqrt{d_1}}\right)^2$, ebenso für die vier Schnittpunkte der Geraden $x_2=0$ mit den Kegelschnitten $d_2=\left(\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2$, $a=\left(\frac{1-\sqrt{d_2}}{1+\sqrt{d_2}}\right)^2$, bei $x_3=0$ schließlich $d_3=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{d_1 d_2}}{\sqrt{d_1}-\sqrt{d_2}}\right)^2$ oder $1+\sqrt{d_2 d_3}+\sqrt{d_3 d_1}+\sqrt{d_1 d_2}=0$ bei entsprechender Reihenfolge der Schnittpunkte und passender Wahl des Zeichens der Quadratwurzeln. Die Elementarteiler sind $\lambda+1$, $\lambda+a$, $\lambda+b$, also Charakteristik [1 1 1].

2. Wir legen den Punkt (1, 0, 0) in den Punkt A, in dem die beiden Schnittpunkte zusammenfallen und die Seite $x_2=0$ in die gemeinsame Tangente in A. B und C seien die beiden übrigen Schnittpunkte. In den Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden BC legen wir den Punkt (0, 0, 1). Dann ist der zur Tangente durch die beiden Geraden AB und AC getrennte vierte harmonische Strahl die Polare des Punktes (0, 0, 1) in bezug auf die beiden Kegelschnitte. Ziehen wir also vom Punkt (0, 0, 1) die zweite Tangente an einen der beiden Kegelschnitte, so liegt der Berührungspunkt auf der genannten Polaren. In diesen Punkt legen wir den dritten Eckpunkt (0, 1, 0) des Koordinatendreiecks. Dann ergeben sich bei passender Wahl des Einheitspunktes für die beiden Kurven die Gleichungen $x_1 x_2=x_3^2$, $a x_1 x_2+x_2^2=x_3^2$ mit $a \neq 0, 1$. Die Geraden AB und AC treffen die Seite $x_1=0$ des Koordinatendreiecks in den Punkten D und E. Wir verbinden diese Punkte mit dem Schnittpunkt F der Geraden BC und $x_3=0$. Die Geraden DF und EF schneiden die beiden Kegelschnitte in vier Punkten gleichen Doppelverhältnisses d. Man erhält nämlich für die Punkte B und C die Koordinaten $\left(1, 1-a, \pm\sqrt{1-a}\right)$, für die Geraden AB, AC und BC die Gleichungen $x_2=\pm\sqrt{1-a}\,x_3$, $x_2=(1-a)x_1$, für die Punkte D, E, F die Koordinaten $\left(0, \pm\sqrt{1-a}, 1\right)$, $(1, 1-a, 0)$, schließlich $d=-\left[\frac{a+4-\sqrt{5(a^2+4)}}{2(a-1)}\right]^2$, $a=\frac{1+d-4\sqrt{-d}}{1+d+\sqrt{-d}}$ ist projektive Invariante. Die Elementarteiler sind $\lambda+1$, $(\lambda+a)^2$, also Charakteristik [2 1].

3. Wir legen den Punkt (1, 0, 0) in den Punkt A, in dem die drei Schnittpunkte zusammenfallen, die Seite $x_2=0$ in die gemeinsame Tangente in A und den Punkt (0, 1, 0) in den vierten Schnittpunkt B. Die Seite $x_1=0$ sei die Tangente in B an einen der beiden Kegelschnitte. Damit erhält man

bei passender Wahl des Einheitspunktes das Gleichungspaar $x_1 x_2 = x_3^2$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 = x_3^2$, $(\lambda+1)^3$ ist Elementarteiler, Charakteristik [3].

4. Wir legen die Punkte (1, 0, 0) und (0, 1, 0) in die beiden Berührungspunkte, die Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ in die entsprechenden gemeinsamen Tangenten. Dann ergibt sich bei passender Wahl des Einheitspunktes das Gleichungspaar $x_1 x_2 = x_3^2$, $a x_1 x_2 = x_3^2$ mit $a \neq 0, 1$. Jede Gerade durch den Punkt (0, 0, 1) schneidet die beiden Kegelschnitte in Punkten gleichen Doppelverhältnisses $d = \left(\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2$, $a = \left(\frac{1-\sqrt{d}}{1+\sqrt{d}}\right)^2$ ist projektive Invariante, die Elementarteiler sind $\lambda+1$, $\lambda+a$, $\lambda+a$, die Charakteristik ist [(1 1) 1].

5. Wir legen den Punkt (1, 0, 0) in den gemeinsamen Berührungspunkt, die Seite $x_2 = 0$ in die gemeinsame Tangente, die Seite $x_1 = 0$ in eine andere Tangente eines der beiden Kegelschnitte und den Punkt (0, 1, 0) in den Berührungspunkt dieser Tangente. Die Gerade $x_1 = 0$ wird von den Kegelschnitten des durch die beiden gegebenen Kegelschnitte bestimmten Büschels in den Punkten einer Involution geschnitten, deren Doppelpunkte die Punkte (0, 1, 0) und (0, 0, 1) sind, weil die Doppelgerade $x_2^2 = 0$ dem Büschel angehört. Diese beiden Punkte sind also in bezug auf den zweiten Kegelschnitt konjugiert. Daher ergeben sich für die beiden Kegelschnitte bei passender Wahl des Einheitspunktes die Gleichungen $x_1 x_2 + x_3^2 = 0$, $x_1 x_2 + x_2^2 = x_3^2$. Die Elementarteiler sind $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, die Charakteristik ist [(2 1)].

6. Wir legen das Koordinatendreieck in ein Polardreieck der beiden zusammenfallenden Kegelschnitte und erhalten bei passender Wahl des Einheitspunktes für beide die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, die Elementarteiler $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda+1$, somit die Charakteristik [(1 1 1)].

Die Einteilung der Kegelschnittspaare in sechs Klassen in bezug auf ihre Elementarteiler entspricht also der Reihenfolge nach genau ihrer Einteilung in sechs Klassen in bezug auf ihre Schnittpunkte. Ist demnach die Charakteristik des Paares bekannt, so kann man durch eine passende Kollineation oder Koordinatentransformation immer eine der obigen Normalformen[4]) herstellen.

Die beiden quadratischen Gleichungen der Kegelschnitte haben also z.B. dann und nur dann dieselben Lösungen, wenn der Fall 6. vorliegt, d.h. die Elemente der λ-Matrix den größten gemeinsamen Teiler $\lambda - \alpha$ haben, die Koeffizienten der beiden Gleichungen somit proportional sind.

[4]) Sie finden sich schon in dem Buch von T. J. I'A. Bromwich, Quadratic forms and their Classification by means of Invariant-factors, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Nr. 3, S. 32—35. Cambridge: University Press 1906.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 10. März 1956)

Lenz, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 153—175 (1957)

Über die elliptischen Funktionen von Jacobi

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Hanfried Lenz

Einleitung

Herr Faber hat 1920 im Vorwort der von ihm völlig neu bearbeiteten Burkhardtschen Vorlesungen über elliptische Funktionen[1]) geschrieben: „Als ich nach dem allzufrühen Tode Burkhardts auf Wunsch des Verlags die Besorgung der dritten Auflage dieses Buchs übernahm, erblickte ich meine Aufgabe vor allem darin, die der Burkhardtschen Darstellung eigentümlichen Vorzüge zu erhalten, nämlich die enge Verknüpfung und Durchdringung Abelscher und Jacobischer, Cauchyscher, Riemannscher und Weierstrassscher Gedanken, sowie die bewußte Heranziehung der geometrischen Anschauung[2]) bei aller sonstigen Strenge im Analytischen."

Diesem Ziel will auch die vorliegende Arbeit dienen. Wer allerdings über eine so alte und nach allgemeiner Ansicht abgeschlossene Theorie überhaupt noch eine Arbeit schreibt, muß das begründen: Ein Vergleich der elliptischen Funktionen von Jacobi und Weierstrass zeigt, daß die Weierstraßschen Funktionen einen besonders einfachen systematischen Aufbau der Theorie ermöglichen, während sich die Jacobischen bis heute in den Anwendungen, insbesondere in den Funktionentafeln, behauptet haben[3]). E. H. Neville[4]) hat daher einen sehr bemerkenswerten Versuch gemacht, die Vorzüge beider Theorien zu vereinigen, d.h. eine Theorie der Jacobischen *Funktionen* auf Grund Weierstrassscher *Gedanken* zu geben und insbesondere den Jacobischen analoge Funktionen für beliebig gegebenes Periodengitter einzuführen. Die vorliegende Arbeit will den Nevilleschen Aufbau der Theorie noch vereinfachen; insbesondere soll gezeigt werden, daß es nicht nötig ist, die Weierstraßschen Funktionen und viele neue Bezeichnungen einzuführen, wie Neville tut, sondern daß bei unwesentlich modifizierter Auffassung die alten, von Gudermann und Glaisher eingeführten Bezeichnungen für die Jacobischen

[1]) Burkhardt-Faber: Elliptische Funktionen, 3. Aufl., Berlin u. Leipzig 1920.

[2]) Anschaulich-geometrische Betrachtungen zur Lösung des Umkehrproblems mit besonders einfachen Mitteln finden sich auch bei R. Fricke, Enc. math. Wiss. II B 3, insbes. S. 254ff., ferner: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen I, S. 164ff., Leipzig u. Berlin 1916. Die im folgenden durchgeführte Lösung des Umkehrproblems schließt sich an Frickesche Gedankengänge an.

[3]) Vgl. etwa Milne-Thomson: Jacobian Elliptic Function Tables. New York 1950. — Byrd, P. F., and Friedman, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. Schuler, M., u. H. Gebelein: Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. — Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Springer 1955.

[4]) Neville, E. H.: Jacobian Elliptic Functions, 2nd ed. Oxford 1951.

Funktionen, ihre Reziproken und Quotienten völlig ausreichen. Die Thetafunktionen normiert man nach dem Muster NEVILLEs besser etwas anders als üblich. Man erhält so ein ganz einfaches Verhalten gegenüber Periodentransformationen. Die Jacobischen elliptischen Funktionen in der hier behandelten Auffassung sind ein Sonderfall der meromorphen Funktionen mit doppeltperiodischem *absolutem Betrag* und genau einem Pol im Periodenparallelogramm (des Betrages). Diese letzteren Funktionen geben einen kaum noch zu vereinfachenden Zugang zur Transformation höheren Grades der elliptischen Funktionen.

Die Weierstraßschen Funktionen treten in der hier gewählten Darstellung kaum mehr in Erscheinung. Man darf aber deshalb nicht denken, sie seien in der Theorie der elliptischen Funktionen ganz entbehrlich. Das Verhalten der Jacobischen Funktionen hinsichtlich Periodentransformationen wird bei den Jacobischen Funktionen und Thetafunktionen in der hier vertretenen Auffassung zwar sehr einfach; völlige Invarianz läßt sich aber nur bei den Weierstraßschen Funktionen erreichen.

§ 1. Elliptische Integrale erster Gattung

1. Konforme Abbildung. Das elliptische Integral 1. Gattung

$$u = \text{const} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\prod_{\nu} (z - z_\nu)}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4 \text{ oder } \nu = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

wird bekanntlich durch jede ganze oder gebrochene lineare Transformation der Variablen z in ein ebensolches übergeführt. Es ist daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, es in der sog. Riemannschen Normalform

$$\mu u = \int \frac{dZ}{2\sqrt{Z(1-Z)(1-\lambda Z)}} = w \tag{1.2}$$

zu schreiben. Dabei sei

$$K = \int_0^1, \qquad -iK' = \int_{-\infty}^0 \tag{1.3}$$

gesetzt, wobei geradlinig zu integrieren ist und das Vorzeichen der Wurzel im Integranden so festgelegt sein soll, daß der Integrand gegen $+\infty$ strebt, wenn Z von rechts her auf der reellen Achse gegen 0 strebt, und gegen $-i\infty$, wenn Z von links gegen 0 strebt. Wenn $1/\lambda$ nicht <1 ist, was sich bei der Herstellung der Normalform (1.2) erreichen läßt, sind die „vollständigen Integrale" (1.3) damit eindeutig bestimmt. $2K$ und $2iK'$ sind nach dem Cauchyschen Satz gleich den Integralen auf geschlossenen Wegen, die die Strecken $[0, 1]$ bzw. $[1, 1/\lambda]$ und keine weiteren Verzweigungspunkte des Integranden umlaufen, wobei die Durchlaufungsrichtung noch von der Wahl des Vorzeichens der Wurzel abhängt.

Durch je drei der vier Verzweigungspunkte des Integranden von (1.1) geht ein Kreis, der die Zahlenkugel in zwei Kalotten zerlegt, von denen

mindestens eine den vierten Verzweigungspunkt nicht im Innern enthält. Es gilt [Fig. 1]

Satz 1. *$\mathfrak{K}$ sei eine Kalotte der Zahlenkugel, die auf dem Rande drei Verzweigungspunkte des Integrals* (1.1) *enthält, während im Innern kein solcher Verzweigungspunkt liegt. Dann bildet das Integral* (1.1) *die Kalotte $\mathfrak{K}$ auf ein konvexes Kurvendreieck $\mathfrak{D}$ mit drei rechten Winkeln ab, dessen Ecken sich zu einem geradlinigen Dreieck verbinden lassen, das nur rechtwinklig ist, wenn alle vier Verzweigungspunkte auf einem Kreis liegen und sonst spitzwinklig. In dem Grenzfall, daß alle vier Verzweigungspunkte auf einem Kreis liegen, geht das Kurvendreieck in ein Rechteck über* [Fig. 2].

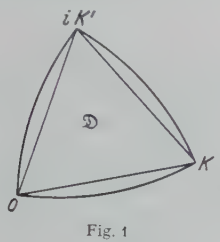

Fig. 1

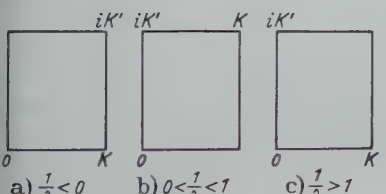

Fig. 2 a—c

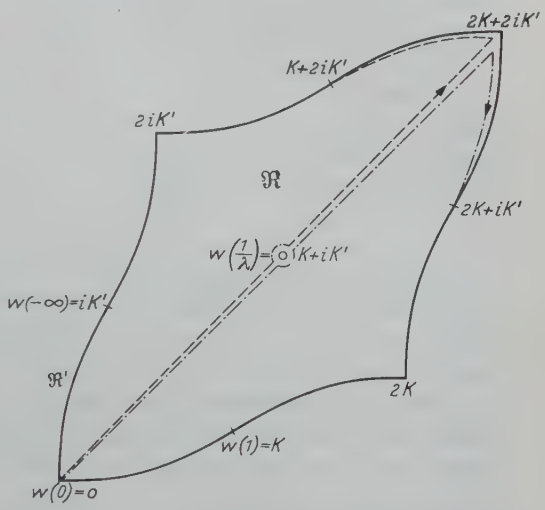

Fig. 3

Beweis. Es genügt, die Normalform (1.2) zu betrachten, in der wir noch $\mathfrak{Im}\,\lambda \geqq 0$ annehmen dürfen (andernfalls führe man $1/Z$ als neue Variable ein). $\mathfrak{K}$ wird dann die obere Halbebene. $\arg \frac{1}{\sqrt{1-\lambda Z}}$ nimmt im Fall $\mathfrak{Im}\,\lambda > 0$ stetig und monoton um insgesamt 90° zu, wenn Z die reelle Achse (als Rand der oberen Halbebene) von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, während $\arg \frac{1}{\sqrt{Z}}$ und $\arg \frac{1}{\sqrt{1-Z}}$ stückweise konstant sind und nur bei $z=0$ bzw. $z=1$ um $+90°$ springen. Das Bild der reellen Achse wird also eine aus drei stetig differenzierbaren konvexen Bögen zusammengesetzte Kurve mit drei rechten Eckenwinkeln und einer Gesamtbiegung der Bögen von 90°. Daher müssen die Winkel des von den drei Ecken gebildeten geradlinigen Dreiecks spitz sein. Keine Tangente eines der drei Bögen ist parallel zu einer Tangente eines der drei anderen Bögen. Die Ecken liegen bei iK', 0, K.

Im Fall $\mathfrak{Im}\,\lambda = 0$ werden aus zweien der Bögen Strecken, aus dem dritten ein rechtwinkliges Streckenpaar. Weil u im Innern von $\mathfrak{K}$ regulär ist, können

wir in bekannter Weise[5]) von der Abbildung des Randes auf die Abbildung des Inneren schließen, womit Satz 1 bewiesen ist. Ebenso folgt [Fig. 3]

Satz 2. *Es sei entweder* $\Im\mathfrak{m}\,\lambda>0$ *oder* $\frac{1}{\lambda}>1$. *Dann bildet das Integral* (1.2) *die doppelt überdeckte, längs der Halbgeraden* $Z\leqq 1$ *aufgeschnittene und bei* $Z=1/\lambda$ *verzweigte Z-Ebene umkehrbar eindeutig und (außer an der Stelle* $1/\lambda$*) konform auf ein Kurvenrechteck* $\mathfrak{R}$ *ab, das von vier einzeln zentralsymmetrischen und paarweise kongruenten und homothetischen Kurvenbögen begrenzt wird. Jeder dieser Kurvenbögen besteht aus zwei kongruenten und gegeneinander um 180° verdrehten Teilbögen, die je einem der Bögen des in Satz 1 beschriebenen Kurvendreiecks kongruent sind. Es ist* $w(1/\lambda)=K+iK'$, *wenn die Integrationskonstante durch* $w(0)=0$ *festgelegt wird.*

Beweis. Daß der Rand der doppelt überdeckten, wie angegeben aufgeschnittenen und verzweigten Z-Ebene, also die viermal durchlaufene Halbgerade $Z\leqq 1$, auf eine Kurve wie in Satz 2 beschrieben abgebildet wird, folgt unmittelbar aus den beim Beweis des Satzes 1 angestellten Betrachtungen. Daß diese Kurve $\mathfrak{R}'$ einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{R}$ umschließt, erkennt man leicht mit Hilfe der Tatsache, daß verschiedene Bögen des Kurvendreiecks $\mathfrak{D}$ niemals parallele Tangenten haben. Denn dadurch wird sichergestellt, daß $\mathfrak{R}'$ doppelpunktfrei ist. [Man könnte auch ohne Verwendung des Jordanschen Kurvensatzes zum Ziel kommen, indem man eine krummlinige „Seite" des „Rechtecks" $\mathfrak{R}'$ längs der benachbarten stetig entlangschiebt, wobei sie niemals eine ihrer früheren Lagen trifft und daher ein dem Rechteck homöomorphes Gebiet überstreicht.] Man kann wieder von der Abbildung des Randes auf die des Inneren schließen [wenn man Skrupel wegen des Verzweigungspunktes hat, mittels einer Hilfsabbildung], womit Satz 2 bewiesen ist. Wegen $\int_{-\infty}^{0}=\pm\int_{1}^{1/\lambda}$ ist $w(1/\lambda)=K+iK'$.

2. Die Umkehrfunktion. Im Innern und auf dem Rand von $\mathfrak{R}$ ist daher Z als Funktion von w meromorph. Für Rand- und Eckpunkte folgt das aus der Reihenentwicklung für $w(Z)$ nach dem funktionentheoretischen Satz über Umkehrfunktionen. $Z(w)$ ist also in einem abgeschlossenen Bereich $\hat{\mathfrak{R}}$ meromorph, der $\mathfrak{R}$ in seinem Inneren enthält. Mit $\hat{\mathfrak{R}}+a$ sei die Menge aller komplexen Zahlen $r+a$ bezeichnet, für die r in $\hat{\mathfrak{R}}$ liegt. Nach Satz 2 und dem Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen gelten die Funktionalgleichungen

$$Z(w\pm 2K)=Z(w), \tag{1.4}$$

$$Z(w\pm 2iK')=Z(w), \tag{1.5}$$

soweit sie einen Sinn haben, d.h. soweit die Zahlen w und $w\pm 2K$ bzw. w und $w\pm 2iK'$ beide in $\hat{\mathfrak{R}}$ liegen. Ebenso ist $Z(2K+2iK'-w)=Z(w)$, also $Z(w)=Z(-w)$.

[5]) Vgl. z.B. BIEBERBACH, L.: Einführung in die konforme Abbildung, S. 47. Sammlung Göschen Bd. 768. — OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, 2. Aufl. S. 377. Leipzig u. Berlin 1912.

Diese Funktionalgleichungen können nun aber dazu verwendet werden, den Definitionsbereich der Funktion $Z(w)$ auf den Bereich $\hat{\mathfrak{R}}+2K$ so auszudehnen, daß $Z(w)$ auch in diesem Bereich bis auf Pole regulär und eindeutig wird. Die Bereiche $\hat{\mathfrak{R}}$ und $\hat{\mathfrak{R}}+2K$ haben einen einfach zusammenhängenden Bereich mit inneren Punkten gemein und daher ist $Z(w)$ auch in ihrem Vereinigungsbereich

$$\hat{\mathfrak{R}}_1 = \hat{\mathfrak{R}} \cup (\hat{\mathfrak{R}} + 2K)$$

bis auf Pole regulär und eindeutig. Denn jeder geschlossene Weg im Vereinigungsbereich läßt sich in endlich viele geschlossene Wege in den Einzelbereichen zerlegen.

Derselbe Schluß läßt sich nacheinander anwenden auf die Bereiche

$$\hat{\mathfrak{R}}_2 = \hat{\mathfrak{R}}_1 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_1 + 2iK'), \qquad \hat{\mathfrak{R}}_3 = \hat{\mathfrak{R}}_2 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_2 - 4K),$$

$$\hat{\mathfrak{R}}_4 = \hat{\mathfrak{R}}_3 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_3 - 4iK'), \qquad \hat{\mathfrak{R}}_5 = \hat{\mathfrak{R}}_4 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_4 + 8K),$$

$$\hat{\mathfrak{R}}_6 = \hat{\mathfrak{R}}_5 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_5 + 8iK'), \qquad \hat{\mathfrak{R}}_7 = \hat{\mathfrak{R}}_6 \cup (\hat{\mathfrak{R}}_6 - 16K),$$

. . . . . .

$Z(w)$ läßt sich daher als eindeutige und meromorphe Funktion in den Vereinigungsbereich aller dieser Bereiche, *d.h. die volle w-Ebene*, fortsetzen, wobei die Beziehungen (1.4) und (1.5) erhalten bleiben. Wir haben damit

Satz 3. *Die Umkehrfunktion $Z(w)$ des elliptischen Integrals* (1.2) *ist in der ganzen w-Ebene eindeutig, meromorph und doppeltperiodisch. Ihre Nullstellen, Pole, 1-Stellen, $1/\lambda$-Stellen liegen genau bei $w \equiv 0,\ iK',\ K,\ K+iK'$* (mod $2K,\ 2iK'$). *Daher sind $2K$ und $2iK'$ primitive Perioden von $Z(w)$. $Z(w)$ ist eine gerade Funktion.*

Die w-Ebene ist also schachbrettartig von den Bereichen $\hat{\mathfrak{R}}+2mK+2niK'$ überdeckt und jeder dieser Bereiche ist konformes Bild der, wie in Satz 2 beschrieben, aufgeschnittenen und verzweigten doppelt überdeckten Z-Ebene.

Man hätte die Eindeutigkeit von $Z(w)$ natürlich auch mit Hilfe des sog. Rationalitätsradius nach Bieberbach beweisen können[6]), doch wurde der vorliegende Weg gewählt, weil er besonders anschaulich ist.

§ 2. Das Periodenverhältnis

1. Die konforme Abbildung durch das Periodenverhältnis. Wir setzen

$$\tau = \frac{iK'}{K}. \tag{2.1}$$

Für $\lambda \neq 0, 1, \infty$ sind K und K' als bestimmte Integrale mit von λ unabhängigen Grenzen nach λ differenzierbar und nach Satz 1 von Null verschieden. Daher ist τ als Funktion von λ für $\lambda \neq 0, 1, \infty$ regulär.

[6]) Bieberbach, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 239. Leipzig u. Berlin 1921. Vgl. auch Siegel, C. L.: Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie. Göttinger Vorlesung 1953/54, S. 32ff.

Für $\Im\mathfrak{m}\,\lambda>0$ ist das Dreieck $0, K, iK'$ nach Satz 1 *spitzwinklig* und daher liegt τ in dem Spitzendreieck

$$(2.2)\qquad \left.\begin{array}{l} 0<\Re\mathfrak{e}\,\tau<1\,, \\ |\tau-0{,}5|>0{,}5 \end{array}\right\} \text{ für } \Im\mathfrak{m}\,\lambda>0 \text{ [Fig. 4a], außerdem } \Im\mathfrak{m}\,\tau>0.$$

In den Grenzfällen a) $1/\lambda<0$, b) $0<1/\lambda<1$, c) $1/\lambda>1$ geht das Kurvendreieck $\mathfrak{D}$ in die Rechtecke der Fig. 2 über und daraus folgt

im Fall a) $\qquad \Re\mathfrak{e}\,\tau=1\,,$

im Fall b) $\qquad |K|=|-K+2iK'| \quad$ oder $\quad 0{,}5=|\tau-0{,}5|\,,$

im Fall c) $\qquad \Re\mathfrak{e}\,\tau=0.$

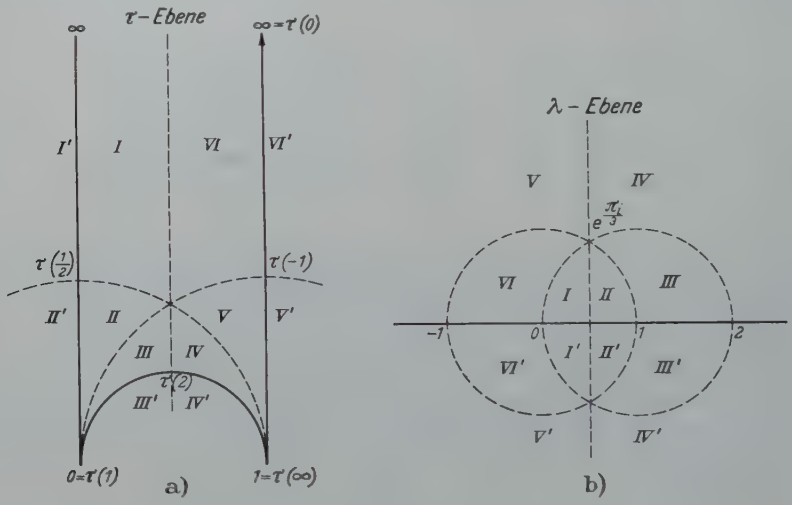

Fig. 4 a und b

Für *reelle* $\lambda\neq 0, 1, \infty$ ist ferner $\frac{d\tau}{d\lambda}\neq 0$, denn andernfalls würde eine gewisse Umgebung eines solchen Punktes λ so auf die τ-Ebene abgebildet, daß Punkte aus der oberen λ-Halbebene außerhalb des Bereiches (2.2) abgebildet würden, was nicht sein kann. Wenn also $1/\lambda$ die Geradenstücke $[-\infty, 0]$ bzw. $[0, 1]$ bzw. $[1, \infty]$ durchläuft, so durchläuft τ Teile der den Bereich (2.2) begrenzenden Kreisbögen bzw. Geradenstücke in konstanter Richtung. τ durchläuft diese Kreisbögen bzw. Geradenstücke sogar *ganz*. Um das zu zeigen, müssen wir noch beweisen, daß

$$(2.3)\qquad \lim_{\lambda\to 1}\tau(\lambda)=0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\tau(\lambda)=1, \quad \lim_{\lambda\to 0}\tau(\lambda)=\infty$$

ist.

Beweis. Bei geradliniger Integration längs des Randes der oberen Halbebene wird im Fall $\Im\mathfrak{m}\,\lambda>0$ nach (1.3) und Satz 1

$$(2.4)\qquad \int_{-\infty}^{0}=-iK', \quad \int_{0}^{1}=K, \quad \int_{1}^{\infty}=iK'-K.$$

Die Summe der drei Integrale verschwindet. Für $\lambda \to 1$ bleibt das erste Integral beschränkt. Wir zeigen, daß das zweite gegen ∞ strebt. Die Strecke $[0, 1]$ wird durch $u(Z)$ auf einen Kurvenbogen der Biegung $\leq 90°$ abgebildet, dessen Sehnenlänge mindestens das $1/\sqrt{2}$-fache seiner Bogenlänge beträgt. Daher ist

$$\sqrt{2}\,|K| \geq \int_0^1 \frac{dZ}{2\sqrt{Z(1-Z)\,|1-\lambda Z|}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{dZ}{\sqrt{1\,(1-Z)\left(\frac{1}{\lambda}-1+1-Z\right)}}.$$

Mit λ strebt auch $c = \frac{1}{\lambda} - 1 + 1$ gegen 1. Daher wird

$$2\sqrt{2|\lambda|}\,K \geq \int_0^1 \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z)\,(c-Z)}} \geq \int_0^1 \frac{dZ}{\frac{1+c}{2}-Z}$$

$$= \log\frac{1+c}{2} - \log\left(\frac{1+c}{2}-1\right) \to \infty \qquad \text{für} \qquad c \to 1.$$

Weil iK' beschränkt bleibt, folgt $\tau \to 0$. Die anderen beiden Gln. (2.3) ergeben sich genau so. Wie man z.B. durch lineare Transformation von Z nachprüfen kann, bleibt für $\lambda \to 0, 1, \infty$ immer dasjenige Integral (2.4), in dem der Grenzwert von $1/\lambda$ nicht als Grenze vorkommt, beschränkt, während die beiden anderen über alle Grenzen wachsen, und daraus folgt die Behauptung.

Durch $\tau(\lambda)$ wird also die reelle Achse als Rand der oberen Halbebene umkehrbar eindeutig und stetig auf den Rand des Bereiches (2.2) der Fig. 3 abgebildet, während $\tau(\lambda)$ in der oberen Halbebene regulär ist und innere Punkte auf innere Punkte von (2.2) abbildet. Daraus folgt

Satz 4. *Das Periodenverhältnis* $\tau(\lambda) = \frac{iK'(\lambda)}{K(\lambda)}$ *bildet die obere* λ*-Halbebene umkehrbar eindeutig und konform auf das Kreisbogendreieck* (2.2) *ab.*

Weil man in jedem Periodengitter bekanntlich zwei primitive Perioden finden kann, deren Verhältnis in der abgeschlossenen Hülle des Bereiches (2.2) [aber in keiner Ecke] liegt, folgt aus Satz 4, *daß zu jedem vorgegebenen Periodengitter eine nichtkonstante elliptische Funktion existiert, die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals erster Gattung ist.*

Aus Satz 4 läßt sich auf bekannte Weise verhältnismäßig leicht schließen, daß $\lambda(\tau)$ sich nach dem Spiegelungsprinzip *eindeutig* in die ganze obere τ-Halbebene fortsetzen läßt, aber nicht über die reelle Achse hinaus. *Aus Symmetriegründen folgt ferner, daß die in Fig. 4b mit I bis VI bezeichneten Bereiche einzeln auf die in Fig. 4a gleich bezeichneten Teilbereiche des Bereiches* (2.2) *abgebildet werden*[7]).

[7]) Man kann die Abbildung der *Ränder* dieser Bereiche auch leicht direkt einsehen: Falls $\left|\frac{1}{\lambda}\right| = 1$ ist, so folgt aus der Symmetrie der Verzweigungspunkte zur Geraden $\arg z = \frac{1}{2}\arg\frac{1}{\lambda} \pmod{\pi}$, daß $\left|\int_0^{1/\lambda}\right| = \left|\int_0^1\right|$ oder [vgl. Fig. 3] $|1-\tau| = 1$ ist. Ebenso folgt aus $\left|1-\frac{1}{\lambda}\right| = 1$ die Gleichung $\left|\int_1^{1/\lambda}\right| = \left|\int_0^1\right|$ oder $|\tau| = 1$ und aus $\Re\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ die Gleichung $\left|\int_0^{1/\lambda}\right| = \left|\int_1^{1/\lambda}\right|$, d.h. $|1-\tau| = |\tau|$ oder $\Re\,\tau = \frac{1}{2}$.

2. Perioden und Integrationswege. Die analytische Fortsetzung von $\tau(\lambda)$ läßt sich auch in der $1/\lambda$-Ebene anschaulich verfolgen. Man bewege nämlich $1/\lambda$ auf einem $[0, 1, \infty$ vermeidenden] Wege, der einem Weg von τ in der oberen τ-Halbebene entspricht und bewege die Integrationswege der K und $-iK'$ definierenden bestimmten Integrale (1.3), wenn es nötig wird, stetig mit. Aus den geradlinigen Integrationswegen können so komplizierte Wege werden. Die Integrale (1.3) ändern sich, wenn $1/\lambda$ einen geschlossenen Weg durchläuft, um Integrale längs *geschlossenen* Wegen, d.h. um *gerade* Vielfache von K und iK', was man z.B. aus Satz 3 schließen kann. Wir wollen zeigen, daß die Perioden $K(\lambda)$ und $iK'(\lambda)$ bei solchen analytischen Fortsetzungen stets *primitive* Perioden von $Z(u)$ bleiben.

Die bestimmten Integrale $K = \int_0^1$ und $iK' = \int_0^{-\infty}$ hängen nämlich analytisch von λ ab, wenn der vierte Verzweigungspunkt $1/\lambda$ innerhalb der längs der

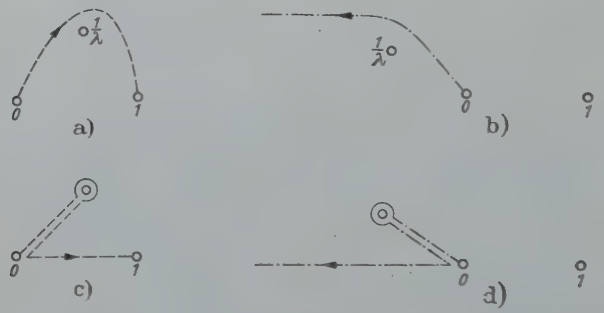

Fig. 5 a—d

Halbgeraden $[-\infty, 1]$ aufgeschnittenen Ebene bewegt wird. Beim Überschreiten dieser Halbgeraden im Intervall $(0, 1)$ bzw. $(-\infty, 0)$ unter Vermeidung der Punkte $0, 1, \infty$ — etwa von oben nach unten — werden $K(\lambda)$ bzw. $iK'(\lambda)$ analytisch fortgesetzt, haben aber danach nicht mehr die Bedeutung als *geradlinig* genommene bestimmte Integrale (1.3). Die geradlinigen Integrale *nach* der Überschreitung seien mit $\hat{K}(\lambda)$ bzw. $i\hat{K}'(\lambda)$ bezeichnet. Vor der Überschreitung entsprechen ihnen Integrale längs der in Fig. 5 a und b eingezeichneten Integrationswege, die man in die Wege der Fig. 5 c und d deformieren kann, ohne an den Integralwerten etwas zu ändern. Diese Wege werden nach Satz 2 auf Wege in der w-Ebene abgebildet, die man in Fig. 3 bequem verfolgen kann (dort gestrichelt bzw. strichpunktiert). Daraus folgt bei Überschreitung des Intervalls $[0, 1]$

$$i\hat{K}' = iK', \qquad \hat{K} = 2iK' + K,$$

bei Überschreitung des Intervalls $(-\infty, 0)$

$$i\hat{K}' = iK' + 2K, \qquad \hat{K} = K.$$

Das sind unimodulare Substitutionen. Durchläuft also $1/\lambda$ irgendeinen geschlossenen Weg, der $0, 1, \infty$ vermeidet, so läuft die analytische Fortsetzung der Halbperioden $K(\lambda)$ und $iK'(\lambda)$ auf eine Folge unimodularer Substitutionen, d.h. auf eine unimodulare Substitution hinaus, die übrigens mod 2 der Identität kongruent ist, w. z. b. w. Bei diesen Substitutionen gehen alle Halbperioden in ihnen modulo ganzer Perioden kongruente Halbperioden über, d.h. die Pole der Funktion $Z(w)$ vertauschen sich nur unter sich, und dasselbe gilt für die 1-Stellen sowie für die $1/\lambda$-Stellen. Aus den bisher bewiesenen Tatsachen folgt unmittelbar

Satz 5. *Zu beliebig gegebenen komplexen Zahlen*[8]) ω_c, ω_n *mit* $\Im\mathfrak{m}\,\frac{\omega_n}{\omega_c} > 0$ *gibt es komplexe Zahlen* $\lambda \neq 0, 1$ *und* $\mu \neq 0$, *so daß die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals 1. Gattung*

$$u = \frac{1}{\mu}\int \frac{dZ}{2\sqrt{Z(1-Z)(1-\lambda Z)}} \tag{2.5}$$

eine doppeltperiodische meromorphe Funktion wird, die $2\omega_c$ *und* $2\omega_n$ *als primitive Perioden hat und die bei* $u \equiv \omega_n \pmod{2\omega_c, 2\omega_n}$ *Pole, bei* $u \equiv 0 \pmod{2\omega_c, 2\omega_n}$ *Nullstellen — beide von zweiter Ordnung — hat, und sonst die Werte* 0 *und* ∞ *nirgends annimmt. Dabei ist*

$$\mu\,\omega_c = \int_0^1, \qquad \mu\,\omega_n = \int_0^{-\infty}, \tag{2.6}$$

wobei die Integrationswege dadurch entstehen, daß der Verzweigungspunkt $1/\lambda$ *einen geschlossenen Weg durchläuft und die Integrationswege — ausgehend von geradlinigen Wegen — stetig mitgeführt werden.*

Der Weg des Verzweigungspunktes $1/\lambda$ bildet sich dabei in der τ-Ebene auf einen Weg ab, der den Punkt ω_n/ω_c mit einem äquivalenten [hinsichtlich der Gruppe der von einer geraden Anzahl von Spiegelungen an den Randbögen von (2.2) erzeugten linearen Transformationen] verbindet. Durch konforme Abbildung eines beliebigen solchen Weges mit Hilfe der Funktion $1/\lambda(\tau)$ [nach Satz 4 und seinen Folgerungen] erhält man stets einen geschlossenen Weg für $1/\lambda$, der nach der Vorschrift des Satzes 5 auf Integrationswege des Integrals (2.5) führt, für die die Beziehungen (2.6) gelten.

§ 3. Jacobische elliptische Funktionen

1. Grundeigenschaften. Ab jetzt werden die Liouvilleschen Sätze dauernd verwendet. Für die Umkehrfunktion $Z(u)$ des elliptischen Integrals (1.2) verwenden wir die klassische Jacobi-Gudermannsche Bezeichnung

$$Z(u) = \mathrm{sn}^2(u; k) \tag{3.1}$$

mit $k^2 = \lambda$.

Wie schon in der Einleitung angekündigt, wollen wir die Bezeichnung so abändern, daß die Perioden der Funktion $\mathrm{sn}^2 u$ beliebig vorgegeben werden

[8]) Die Bezeichnungen ω_c, ω_n werden mit Rücksicht auf das Folgende eingeführt; vgl. Neville p. 51, wo statt dessen ω_f und ω_g geschrieben wird.

können. Das gelingt mit Hilfe der Festsetzung

$$\mathrm{sn}^2(u;\lambda,\mu)=\frac{1}{\mu^2}\,\mathrm{sn}^2(\mu u;k). \tag{3.2}$$

Dann wird $\mathrm{sn}^2(u;\lambda,\mu)$ Umkehrfunktion des elliptischen Integrals

$$u=\int\frac{dt}{2\sqrt{t(1-\mu^2 t)(1-\lambda\mu^2 t)}}. \tag{3.3}$$

Primitive Halbperioden werden — bei geradlinigen Integrationswegen —

$$\omega=\int_0^{1/\mu^2},\qquad \omega'=\int_0^{-\infty}. \tag{3.4}$$

Dabei liegt $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ für $\Im\mathfrak{m}\,\lambda\gtrless 0$ in der abgeschlossenen Hülle des Bereichs (2.2) und ist von $0, 1, \infty$ verschieden. Es ist offenbar

$$\omega(\lambda,\mu)=\frac{K(k)}{\mu},\qquad \omega'(\lambda,\mu)=\frac{K'(k)}{\mu}. \tag{3.5}$$

Sind ω_c, ω_n zu ω, ω' äquivalente Halbperioden, so daß $\omega_c-\omega$ und $\omega_n-\omega'$ *ganze* Perioden sind, so können wir nach Satz 5 $\mathrm{sn}^2(u;\lambda,\mu)$ auch wie folgt kennzeichnen:

Satz 6. $\mathrm{sn}^2(u;\lambda,\mu)$ *ist diejenige elliptische Funktion mit den primitiven Perioden* $2\omega_c, 2\omega_n$, *die bei* $u\equiv 0 \pmod{2\omega_c, 2\omega_n}$ *doppelte Nullstellen, bei* $u\equiv\omega_n \pmod{2\omega_c, 2\omega_n}$ *doppelte Pole hat und sonst die Werte* 0 *und* ∞ *nicht annimmt und deren Entwicklung im Nullpunkt mit dem Glied* u^2 *beginnt.*

Natürlich hätte man die Existenz dieser Funktion auch nach Weierstraßschem Vorbild mittels einer Partialbruchreihe zeigen können und dann daraus die Differentialgleichung der Funktion [vgl. (3.21)] ableiten können. Unser Ergebnis zeigt, daß wir schreiben können

$$\begin{cases}\mathrm{sn}^2(u;\lambda,\mu)=\mathrm{sn}^2(u\,|\,\omega_c,\omega_n)=\mathrm{sn}^2(u\,|\,\omega,\omega'),\\ \mathrm{sn}^2(\varrho u\,|\,\varrho\omega_c,\varrho\omega_n)=\varrho^2\cdot\mathrm{sn}^2(u\,|\,\omega_c,\omega_n)\qquad \text{für alle } \varrho.\end{cases} \tag{3.6}$$

Man kann also $\mathrm{sn}^2 u$ ebensogut als Funktion von u, λ, μ wie als Funktion von u, ω_c, ω_n betrachten; wie bei den Weierstraßschen Funktionen. Wir werden die Parameter λ, μ bzw. ω_c, ω_n in den Funktionsbezeichnungen weglassen, wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht. Wenn sich bei dieser Schreibweise Formeln ergeben, die von der klassischen Theorie abweichen, so tritt in ihnen μ auf, und sie gehen in die üblichen Formeln über, wenn man $\mu=1$ setzt. Setzen wir noch

$$\omega_d=-\omega_c-\omega_n, \tag{3.7}$$

so wird nach Satz 3 und der Definitionsgleichung (3.2)

$$\mathrm{sn}^2\omega_c=\frac{1}{\mu^2},\qquad \mathrm{sn}^2\omega_d=\frac{1}{\lambda\mu^2}. \tag{3.8}$$

Wie in der Weierstraßschen Theorie zeigt man leicht, daß jede gerade elliptische Funktion mit den Perioden $2\omega_c, 2\omega_n$ eine rationale Funktion von

$\mathrm{sn}^2 u$ ist und daß daher der Körper der elliptischen Funktionen mit diesen Perioden von der Funktion $\mathrm{sn}^2 u$ und ihrer Ableitung erzeugt wird.

Das von den primitiven Perioden $2\omega_c$, $2\omega_n$ *der Funktion* $\mathrm{sn}^2 u$ *erzeugte Gitter sei ein für allemal mit* $\mathfrak{W}$ *bezeichnet.*

Wir definieren nun

$$\mathrm{sn}^2(u|\omega_d, \omega_c) = \mathrm{sc}^2(u|\omega_c, \omega_n) = \mathrm{sc}^2 u, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{sn}^2(u|\omega_n, \omega_d) = \mathrm{sd}^2(u|\omega_c, \omega_n) = \mathrm{sd}^2 u. \tag{3.10}$$

Die Nullstellen und Pole der Funktionen $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{sc}^2 u$, $\mathrm{sd}^2 u$ sind von zweiter Ordnung, daher sind die Quadratwurzeln $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{sc}\, u$, $\mathrm{sd}\, u$ aus diesen Funktionen *eindeutige, meromorphe und ungerade Funktionen* mit den (nicht primitiven) Perioden $4\omega_c$, $4\omega_n$. Die Vorzeichen der Quadratwurzeln seien so gewählt, daß ihre Taylorschen Entwicklungen im Nullpunkt mit dem Glied u beginnen. Wir setzen weiter nach Glaisher (vgl. Neville p. 177)

$$\mathrm{cn}\, u = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{sc}\, u}, \qquad \mathrm{dn}\, u = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{sd}\, u}, \qquad \mathrm{cd}\, u = \frac{\mathrm{sd}\, u}{\mathrm{sc}\, u}. \tag{3.11}$$

Sind ferner p, q irgend zwei der vier Buchstaben s, n, c, d, so definieren wir sechs weitere Funktionen durch

$$\mathrm{qp}\, u = \frac{1}{\mathrm{pq}\, u}. \tag{3.12}$$

Schreiben wir der Einfachheit halber für 0 umständlich ω_s, so können wir die grundlegenden Eigenschaften der damit eingeführten 12 Jacobischen Funktionen wie folgt zusammenfassen:

Satz 7. *Schreibt man zwei verschiedene unter den vier Buchstaben* c, d, n, s [*etwa* p, q] *hintereinander, so erhält man ein Glaishersches Funktionssymbol für eine elliptische Funktion* $\mathrm{pq}\, u$ *mit den Perioden* $4\omega_c$, $4\omega_n$. $\mathrm{pq}\, u$ *hat Nullstellen 1. Ordnung bei* $\omega_p \pmod{\mathfrak{W}}$, *Pole 1. Ordnung bei* $\omega_q \pmod{\mathfrak{W}}$ *und in der Umgebung des Nullpunktes eine mit einem der Glieder* 1, u *oder* u^{-1} *beginnende Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von* u. $\mathrm{pq}\, u$ *ist eine ungerade oder gerade Funktion von* u, *je nachdem ob der Buchstabe* s *unter den Buchstaben* p, q *vorkommt oder nicht.*

Im ersten Fall können wir unsere Funktion mit $\mathrm{sp}\, u$ *oder* $\mathrm{ps}\, u$ *bezeichnen, und* $2\omega_p$ *ist dann unter den 3 Zahlen* $2\omega_c$, $2\omega_n$, $2\omega_d$ *ihre einzige Periode. Im zweiten Fall sei* r *der dritte Buchstabe aus dem Tripel* c, d, n (*außer* p *und* q). *Dann ist* $2\omega_r$ *Periode von* $\mathrm{pq}\, u$, *während* $2\omega_p$ *und* $2\omega_q$ *keine Perioden sind.*

Beweis. Die Aussagen über Nullstellen und Pole folgen unmittelbar aus den Definitionen. Keine unserer 12 Funktionen kann zwei der Zahlen $2\omega_c$, $2\omega_d$, $2\omega_n$ als Perioden haben; denn dann wären diese *drei* Zahlen Perioden und unsere Funktion wäre eine elliptische Funktion 1. Ordnung, was nicht geht. Nun ist $\mathrm{pq}(u + 2\omega_i) = \pm \mathrm{pq}\, u$ $(i = c, d, n)$. In dieser Relation gilt also das $+$-Zeichen für höchstens ein i, aber wegen (3.7) auch für mindestens ein i. Ist $\mathrm{pq}\, u$ ungerade, so kann das $+$-Zeichen nur gelten, wenn $\mathrm{pq}\, \omega_i$ einen der

Werte $0, \infty$ annimmt. Ist dagegen $\mathrm{pq}\,u$ gerade, so muß das $+$-Zeichen gelten, wenn $\mathrm{pq}\,\omega_i$ von 0 und ∞ verschieden ist. Daraus folgt die Behauptung.

p, q, r *seien die drei Buchstaben* c, n, d *in irgendeiner Reihenfolge. Dann gelten die Identitäten* (Beweis nach den Liouvilleschen Sätzen)

$$\mathrm{sp}\,(u+\omega_p) = -\,\mathrm{sp}\,\omega_q\,\mathrm{sp}\,\omega_r\,\mathrm{ps}\,u, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{sp}\,(u+\omega_q) = \mathrm{sp}\,\omega_q\,\mathrm{qr}\,u, \tag{3.14}$$

$$\mathrm{pq}\,(u+\omega_p) = -\,\mathrm{rs}\,\omega_p\,\mathrm{sr}\,u, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{pq}\,(u+\omega_q) = -\,\mathrm{sr}\,\omega_q\,\mathrm{rs}\,u, \tag{3.16}$$

$$\mathrm{pq}\,(u+\omega_r) = \mathrm{pq}\,\omega_r\,\mathrm{qp}\,u. \tag{3.17}$$

Die Funktionen $\mathrm{rs}^2u - \mathrm{qs}^2u$ *sind frei von Polen 2. Ordnung; weil sie gerade sind, aber auch frei von Polen 1. Ordnung und daher konstant.* Es folgt

$$\mathrm{rs}^2\omega_q - \mathrm{qs}^2\omega_q = \mathrm{rs}^2\omega_r - \mathrm{qs}^2\omega_r$$

oder

$$\mathrm{rs}^2\omega_q = -\,\mathrm{qs}^2\omega_r. \tag{3.18}$$

Ferner gelten die Ableitungsformeln

$$\mathrm{sp}'u = \mathrm{qp}\,u\,\mathrm{rp}\,u, \quad \mathrm{ps}'u = -\,\mathrm{qs}\,u\,\mathrm{rs}\,u, \quad \mathrm{pq}'u = \mathrm{ps}^2\omega_q\,\mathrm{sq}\,u\,\mathrm{rq}\,u \tag{3.19}$$

und die Identitäten

$$\mathrm{pq}^2u = 1 + \mathrm{ps}^2\omega_q\,\mathrm{sq}^2u, \quad \mathrm{qs}^2u = \mathrm{qs}^2\omega_p + \mathrm{ps}^2u. \tag{3.20}$$

Beweis. Beide Seiten der Gln. (3.20) haben dieselben Pole mit denselben Hauptteilen und stimmen für $u=0$ bzw. $u=\omega_p$ überein. Die Ableitungen der 12 Jacobischen Funktionen $f(u)$ verschwinden an den Stellen ω_i $(i=s, n, c, d)$, wo die Funktionen selbst $\neq \infty, 0$ sind. Denn dann ist $f'(u+2\omega_i) = \pm f'(u)$, je nachdem ob $f(u)$ gerade oder ungerade, $f'(u)$ also ungerade oder gerade ist. Setzt man $u=-\omega_i$, so ergibt sich die Behauptung. Beide Seiten der Gln. (3.19) stimmen also in ihren Nullstellen und Polen überein. Die Konstantenbestimmung in der dritten Gleichung erfolgt am einfachsten, indem man $\mathrm{pq}\,u = \mathrm{ps}\,u\,\mathrm{sq}\,u$ differenziert und (3.20) verwendet. Es folgt

$$\begin{cases} \mathrm{sp}'^2\,u = (1+\mathrm{qs}^2\omega_p\,\mathrm{sp}^2u)\,(1+\mathrm{rs}^2\omega_p\,\mathrm{sp}^2u), \\ \mathrm{ps}'^2\,u = (\mathrm{qs}^2\omega_p + \mathrm{ps}^2u)\,(\mathrm{rs}^2\omega_p + \mathrm{ps}^2u), \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\mathrm{qp}^2\omega_r + \mathrm{qr}^2\omega_p = \frac{\mathrm{sp}^2\omega_r}{\mathrm{sq}^2\omega_r} + \frac{\mathrm{sr}^2\omega_p}{\mathrm{sq}^2\omega_p} = \mathrm{sp}^2\omega_r(\mathrm{qs}^2\omega_r - \mathrm{qs}^2\omega_p) = 1 \tag{3.22}$$

[nach (3.18) und (3.20)].

Das Produkt $\mathrm{ps}\,u\,\mathrm{ps}\,(u+\omega_p)$ ist nach (3.13) konstant. Entwicklung um $u=0$ ergibt als Wert dieser Konstanten $\mathrm{ps}'\omega_p$. Nach (3.13) und (3.19) ist daher

$$\mathrm{ps}\,\omega_q\,\mathrm{ps}\,\omega_r = \mathrm{qs}\,\omega_p\,\mathrm{rs}\,\omega_p$$

oder [wegen (3.18)]

$$\frac{\mathrm{sp}\,\omega_q}{\mathrm{sq}\,\omega_p} = \frac{\mathrm{sq}\,\omega_r}{\mathrm{sr}\,\omega_q} = \frac{\mathrm{sr}\,\omega_p}{\mathrm{sp}\,\omega_r} = \pm i. \tag{3.23}$$

Das Vorzeichen rechts hängt von der Wahl der primitiven Halbperioden [der Funktion $\mathrm{sn}^2 u$] $\omega_p, \omega_q, \omega_r$ ab. Aus Stetigkeitsgründen muß es fest bleiben, solange sich diese Halbperioden stetig ändern und ihre Verhältnisse nicht reell werden. Das ist der Fall, solange das in § 2 behandelte Periodenverhältnis τ in der oberen Halbebene bleibt. Für $\frac{1}{\lambda} > 1$ wird

$$\mathrm{sn}(K|K, iK') = \mathrm{sn}(K; k) = +1,$$
$$\mathrm{sc}(iK'|K, iK') = \mathrm{sn}(iK'|iK', -K) = i\,\mathrm{sn}(K'|K', iK).$$

In dem Sonderfall $K = K'$, $K = \omega_c$, $iK' = \omega_n$ ist also $\frac{\mathrm{sc}\,\omega_n}{\mathrm{sn}\,\omega_c} = +i$, und daraus folgt [Neville p. 59]:

In (3.23) *gilt das* $+$*-Zeichen, wenn und nur wenn* $\Im\mathrm{m}\frac{\omega_q}{\omega_p} > 0$ *ist.*

Wir können jetzt die Vorzeichen der Quadratwurzeln $\sqrt{\mu^2} = \mu$, $\sqrt{\lambda} = k$ und $\sqrt{1-\lambda} = k'$ festlegen durch [vgl. (3.8)]

$$(3.24) \qquad \mu = \mathrm{ns}\,\omega_c, \qquad k = -\frac{\mathrm{sn}\,\omega_c}{\mathrm{sn}\,\omega_d} = \frac{i\,\mathrm{sc}\,\omega_n}{i\,\mathrm{sd}\,\omega_n} = \mathrm{dc}\,\omega_n, \qquad k' = \mathrm{dn}\,\omega_c.$$

2. Lineare Transformationen. Nach (3.23) lassen sich alle in den Gln. (3.13) bis (3.22) vorkommenden Konstanten auf bequeme Art durch die drei Größen μ, k und k' rational ausdrücken. Damit kann man die Transformationsformeln für diese drei Größen und damit für die klassischen Jacobischen Funktionen [als Funktionen von u und λ] bei *Gittertransformationen* leicht angeben, z.B.

$$k(-\omega_n, \omega_c) = \mathrm{dc}(\omega_c|-\omega_n, \omega_c) = \mathrm{dn}(\omega_c|\omega_c, \omega_n) = k',$$
$$\mu(-\omega_n, \omega_c) = \mathrm{ns}(-\omega_n|-\omega_n, \omega_c) = -\,\mathrm{cs}\,\omega_n = i\,\mu.$$

Daraus folgt nach (3.6) und (3.2) die Jacobische Relation

$$i\,\mathrm{sn}(u; k') = \mathrm{sn}(iu; k).$$

Das Verhalten bei Gittertransformationen zeigt besonders eindringlich, daß es zweckmäßig ist, die Jacobischen Funktionen wie die Weierstraßschen als Funktionen der Perioden zu betrachten. Die zwölf Jacobischen Funktionen vertauschen sich bei Gittertransformationen wie folgt: Bei der Substitution

$$(3.25) \qquad \begin{cases} \dot\omega_n = \alpha\omega_n + \beta\omega_c, \\ \dot\omega_c = \gamma\omega_n + \delta\omega_c, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganzzahlig}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{cases}$$

gibt es eine eindeutig bestimmte Permutation p, q, r der Buchstaben c, n, d, so daß

$$\left.\begin{aligned} \dot\omega_c &\equiv \omega_p, \\ \dot\omega_n &\equiv \omega_q, \\ \dot\omega_d &\equiv \omega_r, \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{W}}$$

wird. Dann ist einfach

$$(3.26) \qquad \begin{cases} \dot{\mathrm{sn}}\,u = \mathrm{sn}(u|\dot\omega_c, \dot\omega_n) = \mathrm{sq}\,u, \\ \dot{\mathrm{sc}}\,u = \mathrm{sc}(u|\dot\omega_c, \dot\omega_n) = \mathrm{sp}\,u, \\ \dot{\mathrm{sd}}\,u = \mathrm{sd}(u|\dot\omega_c, \dot\omega_n) = \mathrm{sr}\,u \qquad \text{usw.} \end{cases}$$

3. Additionstheoreme. Sind p, q zwei verschiedene der vier Buchstaben s, c, n, d und ist $2\omega_r$ Periode von $\mathrm{pq}\,u$ [Satz 7], so ist bei festgehaltenem $v \not\equiv \omega_i \pmod{\mathfrak{W}}$, $i = s, c, n, d$,

$$f(u) = \frac{\mathrm{pq}\,u\,\mathrm{pq}'v + \mathrm{pq}'u\,\mathrm{pq}\,v}{\mathrm{pq}^2 u - \mathrm{pq}^2 v}$$

eine elliptische Funktion mit den Perioden $4\omega_c$, $4\omega_n$, $2\omega_r$ und der Eigenschaft

$$f(u + 2\omega_i) = \pm f(u), \qquad i = c, n, d.$$

Sie ist bei $u \equiv -v$ und $u \equiv \omega_q \pmod{\mathfrak{W}}$ regulär und hat daher nur bei $u \equiv v$ Pole. Bei $u \equiv v + \omega_r$ hat sie nach (3.17) bzw. (3.13) Nullstellen. Daher ist

$$f(u) = a\,\mathrm{rs}(u - v)$$

mit von u — und aus Symmetriegründen auch von v — unabhängigem a. Das gilt auch noch für $v = 0$. So ergibt sich im Fall $\mathrm{p}, \mathrm{q} \neq \mathrm{s}$

$$a\,\mathrm{rs}\,u = \frac{\mathrm{pq}'u}{\mathrm{pq}^2 u - 1} \asymp \mathrm{rs}\,u \qquad \text{[nach (3.19) und (3.20)], also } a = 1.$$

Im Fall $\mathrm{p} = \mathrm{s}$, $\mathrm{q} = \mathrm{r}$ wird $a\,\mathrm{rs}\,u = \mathrm{qp}\,u$, also $a = 1$.
Im Fall $\mathrm{q} = \mathrm{s}$, $\mathrm{p} = \mathrm{r}$ wird $a\,\mathrm{rs}\,u = \mathrm{pq}\,u$, also $a = 1$.
Wir haben damit [vgl. NEVILLE S. 203]

Satz 8. *Sind* p, q, r *irgendwelche der vier Buchstaben* s, n, c, d, *so daß* $\mathrm{rs}\,u$ *und* $\mathrm{pq}\,u$ *erklärt sind und dieselben Perioden haben, so gilt das Additionstheorem*

$$\mathrm{rs}(u - v) = \frac{\mathrm{pq}\,u\,\mathrm{pq}'v + \mathrm{pq}'u\,\mathrm{pq}\,v}{\mathrm{pq}^2 u - \mathrm{pq}^2 v}. \tag{3.27}$$

Weitere Additionstheoreme können leicht nach den üblichen Methoden gefunden [NEVILLE p. 74—85 und p. 200—207] oder aus (3.27) nach (3.13) bis (3.17) abgeleitet werden.

4. Transformation zweiter Ordnung. *Es gelten die Formeln* (p, q, r = c, n, d)

$$\mathrm{ps}\,u + \mathrm{qs}\,u = 2\,\mathrm{cs}(u\,|\,2\omega_p, \omega_r), \tag{3.28}$$

$$\mathrm{ps}\,u - \mathrm{qs}\,u = 0{,}5\,\mathrm{ps}^2\omega_q\,\mathrm{sc}(u\,|\,2\omega_p, \omega_r), \tag{3.29}$$

$$\mathrm{qr}\,u + \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}\,u = (1 + \mathrm{qp}\,\omega_r)\,\mathrm{dn}(u\,|\,2\omega_p, \omega_r), \tag{3.30}$$

$$\mathrm{qr}\,u - \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}\,u = (1 - \mathrm{qp}\,\omega_r)\,\mathrm{nd}(u\,|\,2\omega_p, \omega_r). \tag{3.31}$$

Beweis. In jeder der vier Formeln haben die Funktionen auf beiden Seiten dieselben primitiven Perioden, nämlich $4\omega_c$ und $4\omega_n$, dieselben Pole und dieselben Nullstellen. Die vier Funktionen auf der linken Seite bleiben nämlich endlich für $u = 2\omega_p$ bzw. $u = 0$ bzw. $u = \omega_r + 2\omega_p$ bzw. $u = \omega_r$. Weil sie ungerade bzw. gerade sind, müssen sie dort sogar Nullstellen haben. Also sind die linken Seiten den rechten proportional. Die Proportionalitätsfaktoren ergeben sich für (3.28), (3.30) und (3.31) durch Einsetzen von $u = 0$, für (3.29) aus (3.28) und (3.20).

In dem Sonderfall p = c, r = n erhält man daraus mit Hilfe von (3.22) und (3.23) leicht die Identitäten

$$\mu(2\omega_c, \omega_n) = \frac{1+k}{2}\mu, \qquad k'(2\omega_c, \omega_n) = \frac{1-k}{1+k}, \tag{3.32}$$

aus denen sich der Gaußsche Satz vom arithmetisch-geometrischen Mittel ableiten läßt.

Eine besonders einfache Transformationsformel ist

$$\mathrm{sq}^2\omega_r \frac{\mathrm{qr}'u}{\mathrm{qr}\,u} = \mathrm{sr}\,u\,\mathrm{pq}\,u = \mathrm{sn}\left(u \middle| \frac{\omega_p}{2}, \omega_r\right). \tag{3.33}$$

Sie folgt aus der Gleichheit der Perioden, Nullstellen und Pole auf beiden Seiten. Ebenso ist

$$\frac{\mathrm{sp}'u}{\mathrm{sp}\,u} = \mathrm{qs}\,u\,\mathrm{rp}\,u = \mathrm{ns}\left(u \middle| \frac{\omega_p}{2}, \omega_r\right). \tag{3.34}$$

Erwähnt seien noch die damit verwandten und für die unbestimmte Integration der Jacobischen elliptischen Funktionen brauchbaren Formeln [Neville S. 234]

$$\mathrm{rs}\,u = \frac{\mathrm{ps}'u - \mathrm{qs}'u}{\mathrm{ps}\,u - \mathrm{qs}\,u} = -\frac{\mathrm{ps}'u + \mathrm{qs}'u}{\mathrm{ps}\,u + \mathrm{qs}\,u}, \tag{3.35}$$

$$\mathrm{rs}'\omega_r\,\mathrm{sr}\,u = \frac{\mathrm{qr}'u - \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}'u}{\mathrm{qr}\,u - \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}\,u} = -\frac{\mathrm{qr}'u + \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}'u}{\mathrm{qr}\,u + \mathrm{qp}\,\omega_r\,\mathrm{pr}\,u}, \tag{3.36}$$

$$\mathrm{rs}\,\omega_p\,\mathrm{qp}\,u = \frac{\mathrm{sp}'u + \mathrm{sr}\,\omega_p\,\mathrm{rp}'u}{\mathrm{sp}\,u + \mathrm{sr}\,\omega_p\,\mathrm{rp}\,u} = -\frac{\mathrm{sp}'u - \mathrm{sr}\,\omega_p\,\mathrm{rp}'u}{\mathrm{sp}\,u - \mathrm{sr}\,\omega_p\,\mathrm{sp}\,u}. \tag{3.37}$$

Man zeigt nämlich leicht, daß rechts und links die Perioden, Nullstellen und Pole übereinstimmen. Man kann auch die zweite und dritte Gleichung mittels (3.13) und (3.14) auf die erste zurückführen.

5. Weierstraßsche Funktionen. Gegen Gittertransformationen invariante Funktionen des Körpers $C(\omega_c, \omega_n)$ erhält man durch folgende *Definitionen:*

$$\begin{cases} \wp u = \frac{1}{3}(\mathrm{cs}^2 u + \mathrm{ns}^2 u + \mathrm{ds}^2 u), \\ \wp' u = -2\,\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,u = \frac{d}{du}\mathrm{ps}^2 u \qquad (\mathrm{p} = \mathrm{n}, \mathrm{c}, \mathrm{d}). \end{cases} \tag{3.38}$$

Daß $\wp' u$ die Ableitung von $\wp u$ ist, folgt aus (3.19). $\wp u$ hat einen Pol vom Hauptteil u^{-2} an der Stelle $u = 0$ und sonst (modulo Perioden) keine Pole. Nach (3.18) ist $\wp\omega_c + \wp\omega_n + \wp\omega_d = 0$. Daher ist $\wp u$ mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion identisch.

§ 4. Jacobische Zeta- und Thetafunktionen

1. Definitionen. Das elliptische Integral 2. Gattung

$$E(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u\,du = \int_0^u \left[\left(\frac{1}{\mathrm{nd}'\omega_n(u-\omega_n)}\right)^2 + \cdots\right] du = \frac{1}{\mu^2(u-\omega_n)} + \cdots \tag{4.1}$$

ist eine eindeutige, ungerade Funktion. Wir setzen

$$\mathrm{zn}\,u = \mathrm{zn}(u|\omega_c, \omega_n) = \mathrm{zn}(u; \lambda, \mu) = \mu^2 E(u) + a \cdot u \tag{4.2}$$

mit konstantem a. Die Differenzen $\operatorname{zn}(u+2\omega_c)-\operatorname{zn} u$ und $\operatorname{zn}(u+2\omega_n)-\operatorname{zn} u$ sind Konstante. Wir legen a so fest, daß die erste verschwindet. Für die zweite ergibt sich dann durch Bildung des Umlaufintegrals $\int \operatorname{zn} u\, du$ um ein Periodenparallelogramm, weil alle Residuen von $\operatorname{zn} u$ den Wert 1 haben, der Wert $\frac{-\pi i}{\omega_c}$. Es ist also

$$\operatorname{zn}(u+2\omega_c)-\operatorname{zn} u=0, \qquad \operatorname{zn}(u+2\omega_n)-\operatorname{zn} u=\frac{-\pi i}{\omega_c}. \tag{4.3}$$

Diese Jacobische Zetafunktion leistet dasselbe wie die Weierstraßsche, nämlich (mit ihren Ableitungen) die *Partialbruchdarstellung beliebiger elliptischer Funktionen*. Die hier eingeführte Funktion $\operatorname{zn} u$ hängt mit der klassischen Jacobischen Zetafunktion $\operatorname{zn}(u;k)$ zusammen durch die Gleichung

$$\operatorname{zn}(u;\lambda,\mu)=\mu\operatorname{zn}(\mu u;k). \tag{4.4}$$

Wie üblich setzen wir zur Abkürzung

$$v=\frac{u}{2\omega_c}, \quad z=e^{\pi i v}, \quad \tau=\omega_n:\omega_c, \quad q=e^{\pi i\tau}, \quad (|q|<1), \tag{4.5}$$

ferner

$$\operatorname{zn} u=\frac{\vartheta_n'(u)}{\vartheta_n(u)}. \tag{4.6}$$

2. Reihen- und Produktentwicklungen. Die Funktionen

$$\mu^2\operatorname{dn}^2 u \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\pi}{2\omega_c}\right)^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin^{-2}\frac{\pi}{2\omega_c}[u-(2m-1)\omega_n]$$

haben dieselben Pole mit denselben Hauptteilen und unterscheiden sich daher nur um eine additive Konstante C. Die Funktion $C+\mu^2\operatorname{dn}^2 u$ kann nur auf eine Art so gewählt werden, daß ihr Integral $\operatorname{zn} u$ die Periode $2\omega_c$ hat. Weil $\operatorname{zn} u$ ungerade ist, ist dadurch auch die Integrationskonstante eindeutig bestimmt und es wird

$$\operatorname{zn} u=\frac{\pi}{2\omega_c}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_c}[u-(2m-1)\omega_n]+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_c}[u+(2m-1)\omega_n]\right\}. \tag{4.7}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{cases} Q_1=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}), & Q_2=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m}), \\ Q_3=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}), & Q_4=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1}). \end{cases} \tag{4.8}$$

Dann wird $Q_1Q_2Q_3Q_4=Q_1$ oder

$$Q_2Q_3Q_4=1. \tag{4.9}$$

Aus (4.7) folgt durch Integration nach kurzer Rechnung

$$\vartheta_n(u)=Q_4^{-2}\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^2q^{2m-1})(1-z^{-2}q^{2m-1})=Q_4^{-2}F(z). \tag{4.10}$$

Dabei ist die Integrationskonstante so festgelegt, daß

$$\vartheta_n(0) = 1$$

wird. Aus der Funktionalgleichung

$$F(qz) = -q^{-1}z^{-2}F(z) \tag{4.11}$$

erhält man die Laurentsche Entwicklung

$$F(z) = A(q)\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}(iz)^{2m} \tag{4.12}$$

mit noch zu bestimmendem $A(q)$. Setzt man $z=1$ und $z=\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)$ ein, so erhält man durch Vergleich die Identität[9])

$$A(q) : A(q^4) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{8m}) : \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}).$$

Wegen $\lim\limits_{q\to 0} A(q) = 1$ folgt daraus $A(q) = Q_1^{-1}$. Aus (4.10), (4.11) und (4.12) folgt

$$\left\{\begin{aligned}\vartheta_n(u) &= \frac{1-2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v + \cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}\\ &= Q_4^{-2}\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^2q^{2m-1})(1-z^{-2}q^{2m-1}).\end{aligned}\right. \tag{4.13}$$

Aus (4.13) und (4.11) folgen unmittelbar die Funktionalgleichungen

$$\vartheta_n(u+2\omega_c) = \vartheta_n(u), \quad \vartheta_n(u+2\omega_n) = -z^{-2}q^{-1}\vartheta_n(u). \tag{4.14}$$

Setzen wir noch [vgl. Neville p. 274]

$$\vartheta_s(u) = \frac{z\,\vartheta_n(u+\omega_n)}{\vartheta_n'(\omega_n)} = \frac{2\omega_c}{\pi}\,\frac{\sin\pi v - q^{1\cdot 2}\sin 3\pi v + q^{2\cdot 3}\sin 5\pi v + \cdots}{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots}, \tag{4.15}$$

$$\vartheta_c(u) = \frac{\vartheta_s(u+\omega_c)}{\vartheta_s(\omega_c)} = \frac{\cos\pi v + q^2\cos 3\pi v + q^6\cos 5\pi v + \cdots}{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots}, \tag{4.16}$$

$$\vartheta_d(u) = \frac{\vartheta_n(u+\omega_c)}{\vartheta_n(\omega_c)} = \frac{1+2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}, \tag{4.17}$$

so erhalten wir für $p = s, n, c, d$

$$\vartheta_p(u+2\omega_c) = \pm\vartheta_p(u), \tag{4.18}$$

$$\vartheta_p(u+2\omega_n) = \pm q^{-1}z^{-2}\vartheta_p(u). \tag{4.19}$$

Das $+$-Zeichen gilt in (4.18) für $p = n, d$, in (4.19) für $p = c, d$. Die Funktion $\vartheta_p(u)$ ist ungerade für $p = s$ und sonst gerade.

3. Jacobische elliptische Funktionen als Thetaquotienten. Es gilt die zusammenfassende Formel [für p, q = s, c, n, d]

$$\frac{\vartheta_p(u)}{\vartheta_q(u)} = \mathrm{pq}(u) \quad \text{[Neville p. 275]}. \tag{4.20}$$

[9]) Vgl. H. Lenz, Jahresber. DMV 58 (1956) S. 57.

Die in (4.15) bis (4.17) vorkommenden Konstanten $\vartheta_p(\omega_q)$ lassen sich leicht bestimmen. Es wird, wenn wir abkürzend $q_0 = q^{-\frac{1}{4}}$ setzen,

$$(4.21)\qquad \begin{cases} \vartheta_n'(\omega_n) = i\mu\sqrt{k}\,q_0, & \vartheta_s(\omega_n) = \dfrac{i\,q_0}{\mu\sqrt{k}}, \\ \vartheta_c(\omega_n) = \dfrac{q_0}{\sqrt{k}}, & \vartheta_d(\omega_n) = q_0\sqrt{k}\,; \end{cases}$$

$$(4.22)\qquad \begin{cases} \vartheta_c'(\omega_c) = -\mu\sqrt{k'}, & \vartheta_n(\omega_c) = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}, \\ \vartheta_s(\omega_c) = \dfrac{1}{\mu\sqrt{k'}}, & \vartheta_d(\omega_c) = \sqrt{k'}\,; \end{cases}$$

$$(4.23)\qquad \begin{cases} \vartheta_d'(\omega_d) = -i\mu q_0\sqrt{k\,k'}, & \vartheta_c(\omega_d) = -i\,q_0\sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\ \vartheta_n(\omega_d) = q_0\sqrt{\dfrac{k}{k'}}, & \vartheta_s(\omega_d) = \dfrac{-q_0}{\mu\sqrt{k\,k'}}. \end{cases}$$

Man erhält nämlich aus (4.15) für $u = \omega_n$

$$\vartheta_s(\omega_n)\,\vartheta_n'(\omega_n) = -q^{-\frac{1}{2}},$$

andererseits aus (4.20), (3.19), (3.23) und (3.24) nach kurzer Rechnung

$$\frac{\vartheta_n'(\omega_n)}{\vartheta_s(\omega_n)} = \mu^2 k.$$

Daraus und aus (4.20) folgt (4.21), wobei das noch nicht festgelegte Vorzeichen von $\sqrt{k}$ so zu bestimmen ist, daß es für $\Re\,\tau = 0$ positiv wird (dann ist $0 < k < 1$). Entsprechend leitet man (4.22) ab. (4.23) folgt aus (4.21) und (4.22), wenn man (4.15) bis (4.17) verwendet. Aus (4.22) folgt die bekannte Formel

$$(4.24)\qquad \sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots},$$

aus der man die für die numerische Rechnung wichtige Entwicklung

$$q = \gamma + 2\gamma^5 + 15\gamma^9 + 150\,\gamma^{13} + \cdots, \qquad 2\gamma = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

ableitet[10]).

Aus (4.13) ergibt sich

$$\vartheta_n(\omega_c) = Q_4^{-2}\,Q_3^2, \qquad \vartheta_n(\omega_d) = 2\,Q_4^{-2}\,Q_2^2, \qquad \vartheta_n'(\omega_n) = \frac{\pi\,i}{\omega_c}\,Q_4^{-2}\,Q_1^2.$$

Daher wird, wenn man (4.9) berücksichtigt,

$$i\mu = \frac{\vartheta_n'(\omega_n)\,\vartheta_n(\omega_c)}{\vartheta_n(\omega_d)} = \frac{\pi\,i}{2\omega_c}\,Q_1^2\,Q_3^4.$$

[10]) TRICOMI, F.: Elliptische Funktionen, S. 176. Leipzig 1948.

Setzt man in (4.12) $z=i$, so wird wegen $A(q)=Q_1^{-1}$

$$Q_1 Q_3^2 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots \tag{4.25}$$

und daher [TRICOMI S. 175]

$$\sqrt{\frac{2\mu\omega_c}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots,$$

nach (4.24) also

$$\sqrt{\frac{\mu\omega_c}{2\pi}}\left(1+\sqrt{k'}\right) = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \cdots. \tag{4.26}$$

4. Lineare Transformation der Thetafunktionen. Wir wollen den Einfluß der Periodensubstitutionen

$$\begin{cases} \dot\omega_n = \alpha\omega_n + \beta\omega_c, \\ \dot\omega_c = \gamma\omega_n + \delta\omega_c \end{cases} \quad \text{mit} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{3.25}$$

auf die NEVILLEschen Thetafunktionen $\vartheta_p(u)$ untersuchen. Es sei für $m, p = n, c, d, s$

$$\dot\omega_m \equiv \omega_p \pmod{\mathfrak{W}}. \tag{4.27}$$

Wir setzen

$$\dot\vartheta_m(u) = \vartheta_m(u\,|\,\dot\omega_c, \dot\omega_n). \tag{4.28}$$

Dann ist

$$\frac{\dot\vartheta_m(u)}{\vartheta_p(u)} = e^{G(u)}$$

eine ganze, gerade Funktion ohne Nullstellen. Also ist auch $G(u)$ eine ganze, gerade Funktion. Setzen wir für p = s, c, n, d [vgl. (4.6)]

$$\mathrm{zp}\,u = \frac{\vartheta_p'(u)}{\vartheta_p(u)}, \qquad \dot{\mathrm{z}}\mathrm{m}\,u = \mathrm{zm}\,(u\,|\,\dot\omega_c, \dot\omega_n), \tag{4.29}$$

so wird nach (4.18) und (4.19) [vgl. (4.3)]

$$\mathrm{zp}\,(u+2\omega_c) - \mathrm{zp}\,u = 0, \qquad \mathrm{zp}\,(u+2\omega_n) - \mathrm{zp}\,u = \frac{-\pi i}{\omega_c}. \tag{4.30}$$

Wegen $G'(u) = \dot{\mathrm{z}}\mathrm{m}\,u - \mathrm{zp}\,u$ ist $G''(u)$ eine ganze elliptische Funktion, also eine Konstante A. Es ergibt sich

$$2\dot\omega_c A = G'(u+2\dot\omega_c) - G'(u) = \frac{\gamma\pi i}{\omega_c}.$$

Weil $G'(u)$ ungerade ist und wegen $\frac{\dot\vartheta_m(0)}{\vartheta_p(0)} = 1$ ergibt sich

$$\dot\vartheta_m(u) = \vartheta_m(u\,|\,\dot\omega_c, \dot\omega_n) = \exp\left(\frac{\gamma\pi i u^2}{4\omega_c\dot\omega_c}\right)\vartheta_p(u). \tag{4.31}$$

Es treten also keine achten Einheitswurzeln auf wie bei den üblichen Thetafunktionen. *Aus diesem Grunde sind die* NEVILLE*schen Thetafunktionen den*

klassischen vorzuziehen, z.B. für die Produktdarstellung einer elliptischen Funktion $f(u)$ mit den Nullstellen a_i und den Polen b_i in der Form

$$f(u) = \text{const} \cdot \prod_i \frac{\vartheta_s(u-a_i)}{\vartheta_s(u-b_i)}, \qquad \sum a_i = \sum b_i. \tag{4.32}$$

Die WEIERSTRASSsche σ-Funktion ist für die meisten Zwecke entbehrlich. Andererseits kann sie leicht durch folgenden Ansatz gewonnen werden: Man setze $\zeta(u)$ gleich der ungeraden Funktion, deren negative Ableitung die durch (3.38) erklärte Funktion $\wp(u)$ ist, ferner

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}, \qquad \sigma'(0) = 1, \qquad \zeta(u+2\omega_c) - \zeta(u) = 2\eta_c.$$

Dann wird

$$\sigma(u) = \exp\left(\frac{\eta_c u^2}{2\omega_c}\right)\vartheta_s(u). \tag{4.33}$$

5. Zetafunktionen. Die Funktion $\mathrm{zs}\,u$ kann genau so wie die WEIERSTRASSsche Zetafunktion zur Darstellung elliptischer Funktionen mit gegebenen Polen von gegebenen Hauptteilen dienen. Aus (4.15) bis (4.17) folgt

$$\begin{cases} \mathrm{zs}\,u = \dfrac{\pi i}{2\omega_c} + \mathrm{zn}\,(u+\omega_n), \\ \mathrm{zc}\,u = \mathrm{zs}\,(u+\omega_c), \\ \mathrm{zd}\,u = \mathrm{zn}\,(u+\omega_c). \end{cases} \tag{4.34}$$

Die vier Zetafunktionen $\mathrm{zp}\,u$ sind ungerade Funktionen, daher ist

$$\mathrm{zp}\,\omega_c = 0 \qquad \text{für } \mathrm{p} = \mathrm{s,n,d}, \text{ und ebenso} \tag{4.35}$$

$$\mathrm{zp}\,\omega_n = \frac{1}{2}\left[\mathrm{zp}\,\omega_n - \mathrm{zp}\,(-\omega_n)\right] = \frac{-\pi i}{2\omega_c} \qquad \text{für } \mathrm{p} = \mathrm{s,c,d}; \tag{4.36}$$

$$\mathrm{zp}\,\omega_d = \frac{\pi i}{2\omega_c} \qquad \text{für } \mathrm{p} = \mathrm{s,n,c}. \tag{4.37}$$

Damit sind die Werte der ersten Ableitungen der NEVILLEschen Thetafunktionen für Halbperiodenwerte ω_p von u bekannt. Die Werte der höheren Ableitungen an diesen Stellen erhält man mit Hilfe der Formel

$$\mathrm{zn}'\,u = \mathrm{zc}'(u \pm \omega_d) = \mathrm{zs}'(u \pm \omega_n) = \mathrm{zd}'(u \pm \omega_c) = \mu^2\left[\mathrm{dn}^2\,u - \frac{E(\omega_c)}{\omega_c}\right], \tag{4.38}$$

die sich aus (4.2) ergibt, wenn man die Konstante a durch $\mathrm{zn}\,\omega_c = 0$ bestimmt und differenziert.

§ 5. Eine Verallgemeinerung der Jacobischen elliptischen Funktionen

1. Funktionen mit doppeltperiodischem absolutem Betrag. Die absoluten Beträge aller 12 Jacobischen Funktionen $\mathrm{pq}\,u$ haben $\mathfrak{W}$ als Periodengitter. Es liegt daher nahe, sie als Sonderfälle der meromorphen Funktionen mit doppeltperiodischem absolutem Betrag zu betrachten. Für diese gilt der einfache

Satz 9. *Eine meromorphe Funktion $f(u) \not\equiv 0$ mit doppeltperiodischem absolutem Betrag hat ebenso viele Nullstellen wie Pole. Zu m gegebenen Nullstellen und m gegebenen Polstellen gibt es bis auf einen konstanten Faktor genau eine derartige Funktion.*

Beweis. I. Sind $f(u)$ und $g(u)$ zwei solche Funktionen und ist jede Nullstelle von $g(u)$ auch Nullstelle von $f(u)$, jeder Pol von $f(u)$ auch Pol von $g(u)$, so ist ihr Quotient $f(u):g(u)$ von beschränktem absolutem Betrag, also konstant.

II. Daß die Zahl der Nullstellen gleich der der Pole ist, folgt wie bei den elliptischen Funktionen durch Bildung des Umlaufintegrals $\int \frac{f'(u)}{f(u)}\, du$.

III. Weil die von $f(u) \equiv 0$ verschiedenen Funktionen mit doppeltperiodischem absolutem Betrag zum Periodengitter $\mathfrak{W}$ eine Gruppe hinsichtlich der Multiplikation bilden, genügt es, die Existenzaussage des Satzes 11 für $m = 1$ zu beweisen.

Es seien ω_e und $\omega_f \not\equiv \omega_e \pmod{\mathfrak{W}}$ beliebige komplexe Zahlen (also im allgemeinen *keine* Halbperioden). *Wir erklären eine Funktion* ef$u$ *durch*

$$\text{ef}\, u = A \cdot \frac{\vartheta_s(u-\omega_e)}{\vartheta_s(u-\omega_f)}\, e^{Bu} \tag{5.1}$$

mit

$$B = \frac{\pi i}{2\omega_c} \cdot \frac{(\omega_f-\omega_e)\,\overline{\omega}_c - (\overline{\omega}_f-\overline{\omega}_e)\,\omega_c}{\omega_n\,\overline{\omega}_c - \overline{\omega}_n\,\omega_c}\,. \tag{5.2}$$

Die Konstante A sei so bestimmt, daß entweder ef 0 *oder* ef′0 *oder* fe′0 [mit $\text{fe}\, u = \frac{1}{\text{ef}\, u}$] *gleich* 1 *wird.*

Bestimmen wir nämlich die reellen Zahlen x, y so, daß

$$\omega_f - \omega_e = 2x\,\omega_c + 2y\,\omega_n, \qquad \text{also} \qquad B = \frac{\pi i}{\omega_c}\, y \tag{5.3}$$

wird, so sieht man, daß die Funktionalgleichungen

$$\text{ef}\,(u + 2\omega_c) = e^{2\pi i y}\,\text{ef}\, u, \tag{5.4}$$

$$\text{ef}\,(u + 2\omega_n) = e^{-2\pi i x}\,\text{ef}\, u \tag{5.5}$$

gelten. Es ist umgekehrt nicht schwer, in (5.1) die Konstante B so zu bestimmen, daß ef u doppeltperiodischen absoluten Betrag hat, und dabei ergibt sich zwangsläufig (5.2).

Wenn die Funktion ef u für verschiedene Werte von ω_e, ω_f betrachtet werden soll, so sollen an Stelle der Buchstaben e, f auch andere treten können, z.B. g, h, j. Die Buchstaben s, n, c, d sollen jedoch nur verwendet werden, wenn $\omega_s, \omega_n, \omega_c, \omega_d$ die bisher gültige Bedeutung hat.

Sind e, f *zwei dieser Buchstaben* s, c, n, d, *so erhalten wir genau die zwölf Jacobi-Glaisherschen Funktionen.*

Allgemein gelten die Regeln

$$\text{ef}\, u\,\text{fg}\, u = \text{eg}\, u, \qquad \frac{1}{\text{ef}\, u} = \text{fe}\, u, \qquad \text{ef}\, u\,\text{gh}\, u = \text{eh}\, u\,\text{gf}\, u. \tag{5.6}$$

2. Anwendung auf die Transformation der elliptischen Funktionen. Die in (5.3) eingeführten Zahlen x, y seien jetzt rational, etwa

$$x = \frac{a}{m}, \qquad y = \frac{b}{m}, \tag{5.7}$$

und der größte gemeinsame Teiler (a, b, m) von a, b und m sei 1. Weil sich $\mathrm{ef}\, u$ bei Vermehrung von x und y um ganze Zahlen nicht ändert, ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, a und b als teilerfremd anzunehmen [andernfalls setze man $b = b'b''$, $b' \mid m$, $(b'', m) = 1$ und ersetze a durch eine Lösung a_1 der Kongruenzen $a_1 \equiv a \pmod{m}$, $a_1 \equiv 1 \pmod{b''}$. Dann ist $(a_1, b) = 1$]. Für ganze Zahlen M, N ist

$$\mathrm{ef}(u + 2M\omega_c + 2N\omega_n) = e^{\frac{2\pi i}{m}(Mb - Na)}\, \mathrm{ef}\, u. \tag{5.8}$$

$\mathrm{ef}\, u$ ist also doppeltperiodisch zu einem Teilgitter $\dot{\mathfrak{W}}$ des Gitters $\mathfrak{W}$, das seinerseits das von $2m\omega_c$ und $2m\omega_n$ erzeugte Gitter $m\mathfrak{W}$ enthält. $Mb - Na$ durchläuft wegen $(a, b, m) = 1$ alle Reste mod m. Diese Reste entsprechen umkehrbar eindeutig den Nebenklassen von $\dot{\mathfrak{W}}$ in $\mathfrak{W}$, *d.h.* $\dot{\mathfrak{W}}$ *ist ein Teilgitter von* $\mathfrak{W}$ *vom Index* m, *und* $m\mathfrak{W}$ *ist seinerseits Teilgitter von* $\dot{\mathfrak{W}}$ *vom Index* m.

Offenbar erhält man für geeignete a, b jedes Teilgitter dieser Eigenschaften, das in keinem Gitter $k\mathfrak{W}$ mit $k > 1$ liegt. Es gibt primitive Perioden

$$2\dot{\omega}_c = 2a\omega_c + 2b\omega_n, \qquad 2\dot{\omega}_n \in m\mathfrak{W}$$

von $\mathrm{ef}\, u$. Wegen $(a, b) = 1$ ist $2h\dot{\omega}_c \in m\mathfrak{W}$, wenn und nur wenn $h \equiv 0 \pmod{m}$ ist. Es sei $\frac{2\dot{\omega}_n}{m} = 2\omega_0 \in \mathfrak{W}$. Dann ist

$$\mathrm{ef}(u + 2\dot{\omega}_c) = \mathrm{ef}\, u, \qquad \mathrm{ef}(u + 2\omega_0) = \zeta \cdot \mathrm{ef}\, u, \tag{5.9}$$

wobei ζ eine primitive m-te Einheitswurzel ist. $2\omega_0$ und $2\dot{\omega}_c$ erzeugen $\mathfrak{W}$.

$\mathsf{E}_{\mathfrak{W}}$, $\mathsf{E}_{\dot{\mathfrak{W}}}$ *seien die Körper der elliptischen Funktionen zu den Periodengittern* $\mathfrak{W}$ *bzw.* $\dot{\mathfrak{W}}$. $\mathsf{E}_{\dot{\mathfrak{W}}}$ *ist Erweiterung* m*-ten Grades von* $\mathsf{E}_{\mathfrak{W}}$. Denn jedes Element $f(u) \in \mathsf{E}_{\dot{\mathfrak{W}}}$ genügt einer Gleichung m-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{W}}$, deren Wurzeln $f(u), f(u - 2\omega_0), \ldots, f(u + 2(m-1)\omega_0)$ sind. Folglich ist

$$\mathsf{E}_{\dot{\mathfrak{W}}} = \mathsf{E}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{ef}\, u).$$

Denn $\mathrm{ef}\, u$ genügt der Gleichung

$$x^m = (\mathrm{ef}\, u)^m \in \mathsf{E}_{\mathfrak{W}}.$$

Sie ist irreduzibel, denn ihre Wurzeln sind $\mathrm{ef}\, u \cdot \zeta^h$ $(h = 0, 1, \ldots, m-1)$, und ein irreduzibler Faktor k-ten Grades hätte das konstante Glied $\zeta^r (\mathrm{ef}\, u)^k$ [mit ganzzahligem r], das für $k < m$ nicht in $\mathsf{E}_{\mathfrak{W}}$ liegt. *Mit Hilfe der Funktion* $\mathrm{ef}\, u$ *kann diese Körpererweiterung leicht rechnerisch durchgeführt werden.* Es sei nämlich $f(u) \in \mathsf{E}_{\dot{\mathfrak{W}}}$. Wir betrachten die Funktionen $(h = 0, 1, \ldots, m-1)$

$$f_h(u) = f(u) + \zeta^h f(u + 2\omega_0) + \zeta^{2h} f(u + 4\omega_0) + \cdots + \zeta^{(m-1)h} f[u + 2(m-1)\omega_0]. \tag{5.10}$$

Dann ist

$$f_h(u + 2\dot{\omega}_c) = f_h(u), \qquad f_h(u + 2\omega_0) = \zeta^{-h} \cdot f_h(u).$$

$g_h(u) = f_h(u)\,(\mathrm{ef}\,u)^h$ sind nach (5.9) Funktionen aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{W}}$, deren Pole mit ihren Hauptteilen durch rationale Rechnungen bestimmt werden können und die daher z. B. in der Form $\sum_i a_i\,\mathrm{zs}(u - b_i) + \sum_i a_i'\,\mathrm{zs}'(u - b_i) + \cdots$ darstellbar sind. Dann wird

$$f(u) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} g_h(u)\,(\mathrm{ef}\,u)^h. \tag{5.11}$$

Dabei wurde als Konstantenkörper der Körper der komplexen Zahlen genommen. Die Werte $\mathrm{ef}(2h\omega_0)$, $h = 0, 1, \ldots, m-1$ gehen in die Rechnung ein. Die mit der algebraischen Bestimmung dieser Werte verbundenen Schwierigkeiten können natürlich so wenig wie bei den Jacobischen oder Weierstraßschen Funktionen zum Gitter $\mathfrak{W}$ durch die einfachen Mittel der vorliegenden Arbeit überwunden werden, sondern führen auf die Theorie der Modulfunktionen und fallen damit aus dem Rahmen dieser Arbeit, die eine *vereinfachte Darstellung der Elemente der Theorie* geben wollte[11]).

[11]) Über die vorliegende Arbeit wurde Anfang 1956 in einem Vortrag im Münchener mathematischen Kolloquium und am 18. 9. 56 in einem Kurzvortrag auf dem IV. Österreichischen Mathematikerkongreß in Wien berichtet.

München 19, Pötschnerstr. 8

(Eingegangen am 13. April 1956)

Perron, O.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 176—180 (1957)

Ein neuartiges diophantisches Problem

Dem jugendlichen Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957

Von
Oskar Perron

I. Sind a, b zwei verschiedene reelle Zahlen und durchläuft in der Funktion

$$f(x) = |a - x| \cdot |b - x|$$

x alle ganzen rationalen Zahlen, so ist klar, daß es ein Minimum gibt. Denn $f(x)$ wird für hinreichend große $|x|$ beliebig groß, so daß man nur endlich viele Zahlen x durchzuprobieren braucht, um bestimmt auf das Minimum von $f(x)$ zu stoßen. Das ist eine triviale Sache. Der hypertriviale Fall, daß eine der Zahlen a, b selbst rational ganz, das Minimum also gleich 0 ist, mag im folgenden ausgeschlossen bleiben. Da eine der Zahlen a, b die kleinere sein muß und da sich die Frage nicht ändert, wenn man beide um die gleiche ganze Zahl vermehrt, kann man $0 < a < 1$, $a < b$ voraussetzen; das soll im folgenden geschehen. Ich bin nun im Zusammenhang mit einer ganz anderen Aufgabe auf die Frage geführt worden, ob das Minimum ≤ 1 ist. Das ist trivialerweise der Fall, wenn die Differenz $b - a$ klein ist, etwa kleiner als $\frac{1}{2}$. Dann macht nämlich die der Zahl a nächstgelegene ganze Zahl x jeden der beiden Faktoren von $f(x)$ kleiner als 1. Auch wenn $b - a = c$ sehr groß ist, kann es sein, daß das Minimum kleiner als 1 ist, sobald nämlich eine der Zahlen a, b hinreichend nahe bei einer ganzen Zahl liegt; im allgemeinen wird es aber nicht so sein. Das ist wieder trivial. Man kann nun die Frage stellen, ob bei *jedem* Zahlenpaar a, b mit *vorgegebener* Differenz c das Minimum ≤ 1 ist. Damit hört aber die Trivialität auf. Der folgende Satz beantwortet die Frage teilweise:

Satz 1. *Wenn* $0 < a < 1$, $0 < c \leq \sqrt{5}$, *dann ist das Minimum von*

$$f(x) = |a - x| \cdot |a + c - x|$$

kleiner als 1, *wenn man von dem Fall* $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $c = \sqrt{5}$ *absieht; in diesem ist das Minimum gleich* 1.

Beweis. Ist g die größte in $a + c$ enthaltene ganze Zahl, also $g < a + c < g + 1$, so ist klar, daß das Minimum, falls es ≤ 1 ist, nur von einer (oder mehreren) der vier Zahlen $0, 1, g, g + 1$ geliefert werden kann. Denn für alle anderen x sind beide Faktoren von $f(x)$ größer als 1. Offenbar ist $g \geq 0$. Für $g = 0$ ist schon $f(0) = a(a + c) < 1 \cdot 1$, und es ist nichts mehr zu beweisen. Sei daher $g \geq 1$.

Nun ist, wenn wir von der Voraussetzung $c \leqq 5$ vorläufig ganz absehen,

$$(1)\qquad \begin{cases} f(0) & = a(a+c), \\ f(1) & = (1-a)(a+c-1), \\ f(g) & = (g-a)(a+c-g), \\ f(g+1) & = (g+1-a)(g+1-a-c). \end{cases}$$

Wenn wir nun einmal annehmen, das Minimum sei $\geqq 1$, so ist $1 \leqq f(x)$ für alle x, also insbesondere für $x = 0, 1, g, g+1$. Daher ist

erstens: $$1 \leqq f(0) = a(a+c) = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4},$$

und daraus folgt

$$(2)\qquad a + \frac{c}{2} \geqq \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1},$$

zweitens: $$1 \leqq f(1) = (1-a)(a-1+c) = \frac{c^2}{4} - \left(a - 1 + \frac{c}{2}\right)^2,$$

und daraus folgt $\frac{c^2}{4} \geqq 1$ und

$$(3)\qquad a - 1 + \frac{c}{2} \leqq \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1},$$

drittens: $$1 \leqq f(g) = (g-a)(a-g+c) = \frac{c^2}{4} - \left(g - a - \frac{c}{2}\right)^2,$$

und daraus folgt $\frac{c^2}{4} \geqq 1$ und

$$(4)\qquad g - a - \frac{c}{2} \leqq \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1},$$

viertens: $1 \leqq f(g+1) = (g+1-a)(g+1-a-c) = \left(g+1-a-\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}$,

und daraus folgt

$$(5)\qquad g + 1 - a - \frac{c}{2} \geqq \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}.$$

Aus (2) und (3) oder auch aus (5) und (4) ergibt sich

$$\sqrt{\frac{c^2}{4} + 1} \leqq 1 + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1},$$

also, wenn man die rechtsstehende Wurzel nach links bringt und dann die Ungleichung mit der Summe der beiden Wurzeln multipliziert:

$$2 \leqq \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}.$$

Daraus folgt, da die rechtsstehende Funktion von c mit c wächst und für $c = \sqrt{5}$ den Wert 2 hat, sofort: $c \geqq \sqrt{5}$. Für $c < \sqrt{5}$ kann also die oben gemachte

Annahme, das Minimum sei $\geqq 1$, nicht zutreffen, womit der Hauptteil von Satz 1 bereits bewiesen ist. Für $c = \sqrt{5}$ folgt aus (2) und (3)

$$a \geqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad a \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Also kann für $c = \sqrt{5}$ die Annahme, das Minimum sei $\geqq 1$, ebenfalls nicht zutreffen, wenn man von der Zahl $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ absieht. Für diese ist dann $a + c = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, also $g = 2$, und alle vier Ausdrücke (1) sind gleich 1, womit auch der Rest von Satz 1 bewiesen ist.

II. Kenner diophantischer Approximationen werden durch das hier beobachtete Auftreten der Wurzel aus 5 gewiß daran erinnert, daß dieselbe Zahl auch in dem bekannten Satz von HURWITZ auftritt: Jede Irrationalzahl ξ läßt sich durch unendlich viele rationale Brüche $\frac{p}{q}$ so approximieren, daß der Fehler kleiner wird als $\frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$, und hier läßt sich die Zahl $\sqrt{5}$ durch keine für alle ξ gültige größere ersetzen (HURWITZ [3], Beweise unter anderen auch bei FUJIWARA [2], PERRON [5], [7]). Das ist nun trotz der Verschiedenartigkeit der Probleme kein neckischer Zufall; vielmehr bin ich gerade durch Beschäftigung mit dem HURWITZschen Satz zu meiner Fragestellung gelangt und habe das Resultat vorausgesehen.

Der HURWITZsche Satz hat ein Analogon in jedem imaginären quadratischen Zahlkörper, doch kennt man die der $\sqrt{5}$ entsprechende Schranke nur in wenigen Fällen. Speziell im Körper $\mathfrak{R}(i)$ ist sie von FORD [1] und auf anderem Weg auch von mir [4] gefunden worden, und zwar lautet der betreffende Satz so: Jede komplexe Zahl ξ, die nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehört, läßt sich durch unendlich viele Brüche $\frac{p}{q}$, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}(i)$ sind, so approximieren, daß der Fehler kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}\,|q|^2}$ wird, und hier läßt sich die Zahl $\sqrt{3}$ durch keine für alle ξ gültige größere Zahl ersetzen. Auch mit dieser Wurzel aus 3 kann Wiedersehen feiern, wer sich die folgende Frage stellt: Wie groß darf die Zahl c sein, damit bei jedem Paar komplexer Zahlen a, b, für das $|b-a| = c$ ist, stets die Ungleichung $|a-x| \cdot |b-x| \leqq 1$ durch eine ganze Zahl x aus $\mathfrak{R}(i)$ befriedigt werden kann? Die Antwort lautet nämlich: *Für $c \leqq \sqrt{3}$ ist das stets möglich, und zwar mit dem Kleinerzeichen, wenn man von den Fällen*

(I) $$a \equiv \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}, \quad b = a \mp \sqrt{3},$$

(II) $$a \equiv \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad b = a \mp i\sqrt{3}$$

absieht; für diese geht es bloß mit dem Gleichheitszeichen (das Kongruenzzeichen $\equiv d$ bedeutet hier natürlich soviel wie $= d +$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i)$).

Von dem nicht ganz einfachen Beweis dieses Satzes will ich hier absehen. Es ist übrigens nicht so, daß auch bei den anderen imaginären quadratischen Zahlkörpern die entsprechenden Schranken für die beiden Probleme einander gleich sind. Im Körper $\Re(i\sqrt{3})$, wo die der HURWITZschen $\sqrt{5}$ entsprechende Schranke gleich $\sqrt[4]{13}$ ist (PERRON [5]), mag es noch so sein. Aber schon bei $\Re(i\sqrt{2})$, wo die Schranke gleich $\sqrt{2}$ ist (PERRON [6]), glaube ich es nicht, ebensowenig bei $\Re(i\sqrt{7})$ und $\Re(i\sqrt{11})$; und bei den anderen Körpern ist das Problem in dieser Form überhaupt gegenstandslos, weil das Gitter der ganzen Zahlen so weitmaschig ist, daß man beliebig nahe beieinander gelegene Zahlen a, b angeben kann, die von allen ganzen x einen Abstand größer als 1 haben. Trotzdem dürfte für alle Körper eine Übereinstimmung gelten, wenn man die Funktion $f(x)$ in gewisser Weise modifiziert. Beim Körper $\Re(i\sqrt{2})$ habe ich z.B. Ursache zu der Vermutung, daß Übereinstimmung stattfindet, wenn man an Stelle der Funktion $f(x)$ die folgende betrachtet:

$$\operatorname{Min}\left\{f(x),\ 2f\left(x+\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\quad 2f\left(x-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

III. Es gibt nun aber noch eine andere Überraschung. Nachdem durch Satz 1 festgestellt ist, daß die Ungleichung $|a-x|\cdot|b-x|<1$ für $|b-a|<\sqrt{5}$ immer erfüllbar ist, für $|b-a|=\sqrt{5}$ dagegen nicht mehr immer, wird man es gerne für selbstverständlich halten, daß für $|b-a|>\sqrt{5}$ die Ungleichung erst recht nicht mehr immer erfüllbar ist. *Aber das ist gerade falsch*, wie jetzt noch gezeigt werden soll.

Zu dem Zweck nehmen wir den Beweis von Satz 1 wieder auf, gehen also von der Annahme aus, das Minimum sei $\geqq 1$. Dann gelten die Formeln (2) bis (5). Aus (5) und (2) folgt

$$\sqrt{\frac{c^2}{4}+1}\leqq g+1-a-\frac{c}{2}\leqq g+1-\sqrt{\frac{c^2}{4}+1},$$

also ist $2\sqrt{\frac{c^2}{4}+1}\leqq g+1$, und folglich

$$\frac{c^2}{4}\leqq\left(\frac{g+1}{2}\right)^2-1. \tag{6}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sqrt{\frac{c^2}{4}-1}\geqq a+\frac{c}{2}-1\geqq g-1-\sqrt{\frac{c^2}{4}-1},$$

also ist $2\sqrt{\frac{c^2}{4}-1}\geqq g-1$, und folglich

$$\frac{c^2}{4}\geqq\left(\frac{g-1}{2}\right)^2+1. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt nun

$$\left(\frac{g+1}{2}\right)^2-1\geqq\left(\frac{g-1}{2}\right)^2+1,$$

oder einfacher geschrieben:

$$g\geqq 2.$$

Wenn nun $g=2$ ist, so folgt aus (6) und (7): $c=\sqrt{5}$. Das ist der Fall, den wir schon kennen. Wenn aber $g>2$ ist, so ist g mindestens gleich 3, und aus (7) folgt dann: $c\geqq\sqrt{8}$. Wenn daher $c>\sqrt{5}$ ist, so muß, wenn die Annahme, das Minimum sei $\geqq 1$, zutreffen soll, sogar $c\geqq\sqrt{8}$ sein. Für $\sqrt{5}<c\leqq\sqrt{8}$ ist also das Minimum stets kleiner als 1, mit allenfallsiger Ausnahme des Falles $c=\sqrt{8}$, in dem dann aus (3) und (4) folgt:

$$a\leqq 2-\sqrt{2},\qquad a\geqq g-1-\sqrt{2}.$$

Daher muß $g=3$ und $a=2-\sqrt{2}$ sein. In diesem Fall sind $f(0)$ und $f(g+1)$ gleich 2, aber $f(1)$ und $f(g)$ gleich 1, das Minimum ist also gleich 1. Damit ist bewiesen der

Satz 2. *Wenn* $0<a<1$, $\sqrt{5}<c\leqq\sqrt{8}$, *so ist stets das Minimum von* $|a-x|\cdot|a+c-x|$ *kleiner als* 1, *wenn man von dem Fall* $a=2-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{8}$ *absieht; in diesem ist das Minimum gleich* 1.

Auch in diesem merkwürdigen Sprung von $\sqrt{5}$ auf $\sqrt{8}$ wird einen alten Bekannten begrüßen, wer sich an den weiteren Satz von HURWITZ erinnert: Diejenigen Irrationalzahlen, die sich, wenn d eine Zahl größer als $\sqrt{5}$ ist, durch unendlich viele rationale Brüche so gut approximieren lassen, daß der Fehler kleiner als $\frac{1}{dq^2}$ ist, gestatten sogar unendlich viele Approximationen mit einem Fehler kleiner als $\frac{1}{\sqrt{8}\,q^2}$ (HURWITZ [3], Beweise unter anderen auch bei FUJIWARA [2], PERRON [7]).

Literatur

[1] FORD, L. R.: On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number. Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1927). — [2] FUJIWARA, M.: Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen. Tohoku Math. J. **11** (1917); **14** (1918). — [3] HURWITZ, A.: Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. **39** (1891) = Werke II. — [4] PERRON, O.: Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\Re(i)$. Math. Ann. **103** (1930); **105** (1931). — [5] PERRON, O.: Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Abt. **1931**. — [6] PERRON, O.: Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper $\Re(i\sqrt{2})$. Math. Z. **37** (1933). — [7] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl. Bd. 1. Stuttgart 1954.

München 27, Friedrich-Herschel-Str. 11

(Eingegangen am 22. April 1956)

Steuerwald, R.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 181—187 (1957)

Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. II

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Rudolf Steuerwald

Einleitung

Diese Arbeit soll eine früher unter dem gleichen Titel erschienene [Math. Z. **52**, 686—697 (1950)] ergänzen und ist mit dieser so eng verzahnt, daß dem Leser der Rückgriff darauf nicht erspart werden kann. Deshalb werden auch hier die Formeln usw. nicht wieder von vorn, sondern anschließend an die früheren Zahlenwerte numeriert. Es sei daher ein für allemal bemerkt: Hinweise auf die Paragraphen 1 bis 6, die Sätze 1 bis 6 und 1* bis 5*, die Definitionen 1 und 2, die Formeln (1) bis (28) beziehen sich auf die ältere, Hinweise mit höheren Nummern auf die vorliegende Arbeit. Nur bei Seitenangaben wird erstere durch I, letztere durch II gekennzeichnet.

Hier soll gezeigt werden, wie man die früher nur über „ausgezeichnete" Q, c-Folgen gemachten Aussagen (vgl. I, 691 ff., § 4: Def. 1 und 2, sowie Abschnitt III) teilweise auf allgemeine Q, c-Folgen (§ 7) und vollständig auf eine andere besondere Art von solchen (§ 8) sinngemäß ausdehnen kann. Diese Ergebnisse gestatten dann, den Fall $Q=3$ entsprechend zu erledigen (§ 9) wie seinerzeit den Fall $Q=2$.

§ 7

In diesem Paragraphen wird das Analogon zu Satz 4 (I 692) für allgemeine Q, c-Folgen r-ter Ordnung ($r \geqq 3$) entwickelt. Dabei werden folgende Abkürzungen benützt:

$$(29) \qquad \begin{cases} q = Q - c\,b_{r-1}, & U = q\,b_1 - b_{r-1}, & V = q\,b_{r-2} - c, \\ W = b_{r-1}\,b_{r-2} - q\,b_1\,b_{r-2} + c\,b_1 + 1. \end{cases}$$

Zwischen den Größen U, V, W bestehen die Beziehungen

$$(30) \qquad W = -U\,b_{r-2} + c\,b_1 + 1 = -V\,b_1 + b_{r-1}\,b_{r-2} + 1,$$

$$(31) \qquad q\,W = Q - U\,V.$$

Wir werden nun eine Reihe von Ungleichungen aufstellen und beweisen, aber mit Mitteln, die teilweise nur für $r \geqq 4$ funktionieren und für $r=3$ versagen. Die Einbeziehung dieses letzteren Falles durch direkte Verifikation darf aber billigerweise dem Leser überlassen werden; denn sie ist ganz einfach, wenn man beachtet, daß aus (18), (19) (s. I 690) und (30) folgt:

Für $r=3$ ist $U=c$, $V=b_2$, $W=1$.

Aus (18) schließt man mittels (14) und $q \geqq 1$ (s. Satz 1, I 691) auf

$$(-U + c b_1 + 1)\, B_{r-3,1} + (c - q)\, B_{r-5,2} > 0 \qquad (r \geqq 4)$$

und daraus, falls $q - c \geqq 0$, auf $U \leqq c b_1$ oder

$$b_{r-1} \geqq (q - c)\, b_1. \tag{32}$$

Diese Ungleichung gilt aber trivialerweise auch, falls $q - c < 0$.

Ähnlich findet man mittels (19) $V \leqq b_{r-1} b_{r-2}$ oder

$$c \geqq (q - b_{r-1})\, b_{r-2}. \tag{33}$$

Ferner folgt, wieder aus (18) mittels (14)

$$-(U + q)\, B_{r-3,1} + (c b_1 + c + 1)\, B_{r-5,2} < 0 \qquad (r \geqq 4)$$

und daraus

$$U \geqq 1 - q; \tag{34}$$

analog führt (19) auf

$$V \geqq 1 - q. \tag{35}$$

Endlich gilt

$$W \geqq 1. \tag{36}$$

Diese Beziehung folgt nämlich, wenn wenigstens eine der Ungleichungen $U \leqq 0$, $V \leqq 0$ besteht, aus (30); wenn aber $U > 0$ und $V > 0$ ist, aus (20) (I 690).

Jetzt führen (36), (16) und (31) auf

$$U V \leqq c b_{r-1}. \tag{37}$$

Nunmehr beweisen wir:

$$W - U - V - q \leqq -1. \tag{38}$$

Ist zunächst $r \geqq 5$, so schließt man aus (20) mittels (14) auf

$$(W - V)\, B_{r-5,2} - (U + q)\, B_{r-5,1} < 0, \tag{39}$$

$$(W - U)\, B_{r-5,1} - (V + q)\, B_{r-5,2} < 0. \tag{40}$$

Je nachdem nun $B_{r-5,1} \leqq B_{r-5,2}$ oder $B_{r-5,1} \geqq B_{r-5,2}$ ist, folgt (38) aus (39) mittels (34) oder aus (40) mittels (35).

Ist aber $r = 4$, so führt (20) auf $W = q$; und damit verifiziert man

$$(U + V)(b_1 b_2 + 1) = b_1 + b_2 + b_3(b_2^2 - 1) + c(b_1^2 - 1) \geqq 2,$$

also auch $U + V \geqq 1$.

Durch Zusammenfassung der Beziehungen (32) bis (35) und (37) sowie der beiderseits mit q multiplizierten und dann mittels (31) umgeformten Ungleichung (38) erhält man jetzt:

Satz 7. *In jeder Q, c-Folge r-ter Ordnung ($r \geqq 3$) ist, falls man $Q - c b_{r-1} = q$ setzt,*

$$c b_1 \geqq q b_1 - b_{r-1} \geqq 1 - q, \quad b_{r-1} b_{r-2} \geqq q b_{r-2} - c \geqq 1 - q,$$
$$(q b_1 - b_{r-1})(q b_{r-2} - c) \leqq Q - q < Q + q \leqq (q b_1 - b_{r-1} + q)(q b_{r-2} - c + q).$$

§ 8

Früher (I 691: Def. 2) wurden als „ausgezeichnete" Q, c-Folgen diejenigen bezeichnet, bei denen $c > 0$ ist und b_{r-1} seine *obere* Schranke $\frac{Q-1}{c}$ erreicht. Nur für sie konnten in Satz 5 (I 693) gewisse Rekursionsbeziehungen nachgewiesen werden. Hier soll nun gezeigt werden, daß entsprechende Aussagen auch für diejenigen Q, c-Folgen mit $c > 0$ gelten, bei denen b_{r-1} seine *untere* Schranke $\frac{Q-c}{c-1}$ (vgl. I 691, Satz 1) erreicht. Um auch für sie einen bequemen Namen zu haben, sei es erlaubt, die früheren „ausgezeichneten" Q, c-Folgen von jetzt ab statt dessen „*maximale*" und die neuen „*minimale*" zu nennen.

Definition 3. *Eine Q, c-Folge r-ter Ordnung, bei der $c > 0$, $c+1$ Teiler von $Q - c$ und $b_{r-1} = \frac{Q-c}{c+1}$ ist, heiße eine minimale Q, c-Folge.*

Bei einer minimalen Q, c-Folge wird gemäß ihrer Definition

$$q = c + b_{r-1}, \quad Q + 1 = (c+1)(b_{r-1} + 1). \tag{41}$$

Damit folgt aus (32) und (33) für $r \geqq 3$:

$$b_1 = b_{r-2} = 1, \tag{42}$$

also

$$U = c, \quad V = b_{r-1}, \quad W = 1. \tag{43}$$

Jetzt setzen wir in (17) (I 690) $q = c + b_{r-1}$, wenden dann (12) auf $c B_{r-2}$, (13) auf $b_{r-1} B_{r-2}$ an, berücksichtigen (42) und (43) und multiplizieren beiderseits mit -1. Dann ergibt sich

$$c B_{r-4} + b_{r-1} B_{r-4,2} - B_{r-4,1} = 0 \quad (r \geqq 3). \tag{44}$$

Daraus erhält man: erstens, indem man (12) auf $B_{r-4,2}$, (13) auf $B_{r-4,1}$, B_{r-4} und $B_{r-5,1}$ anwendet,

$$(b_{r-1} - b_2) B_{r-5,2} + (c b_2 + q) B_{r-6,2} + c B_{r-7,3} - B_{r-6,3} = 0 \quad (r \geqq 5); \tag{45}$$

zweitens, indem man (13) auf B_{r-4}, (12) auf $B_{r-4,1}$, $B_{r-4,2}$ und $B_{r-5,2}$ anwendet,

$$(c - b_{r-3}) B_{r-5,1} + (b_{r-1} b_{r-3} + q) B_{r-6,2} + b_{r-1} B_{r-7,2} - B_{r-6,1} = 0 \quad (r \geqq 5). \tag{46}$$

Endlich geht (45) durch Anwendung von (12) auf $B_{r-5,2}$ und $B_{r-6,3}$ nach leichter Umformung über in

$$\begin{aligned} &[Q - (b_{r-1} - b_2)(c - b_{r-3})] B_{r-6,2} + (b_{r-1} - b_2) B_{r-7,2} \\ &\quad + (c - b_{r-3}) B_{r-7,3} - B_{r-6,3} = 0 \quad (r \geqq 6). \end{aligned} \tag{47}$$

Die Analogie zwischen (24) bis (26) (I 693) und (45) bis (47) ist evident; daher führt auch eine Schlußweise, welche der dortigen genau entspricht, in Verbindung mit (42) zu den beiden folgenden Sätzen.

Satz 8. *In jeder minimalen Q, c-Folge r-ter Ordnung ($r \geqq 5$) ist*

$$b_1 = b_{r-2} = 1, \qquad b_2 - b_{r-1} \geqq 0, \qquad b_{r-3} - c \geqq 0,$$
$$(b_2 - b_{r-1})(b_{r-3} - c) < Q < (b_2 - b_{r-1} + 1)(b_{r-3} - c + 1).$$

Insbesondere gilt also: Wenn von den beiden nicht negativen Differenzen $b_2 - b_{r-1}$, $b_{r-3} - c$ die eine nicht verschwindet, ist die andere $\leqq Q - 1$; wenn die eine verschwindet, ist die andere $\geqq Q$.

Satz 9. *Eine Folge $b_1, \ldots, b_{r-1} = \frac{Q-c}{c+1}$ ($c > 0$, $r \geqq 7$) ist dann und nur dann eine minimale Q, c-Folge, wenn $b_1 = b_{r-2} = 1$,*

ferner $b_3, \ldots, b_{r-4}$, c^* eine Q, c'-Folge

oder $b_{r-4}, \ldots, b_3$, c' eine Q, c^*-Folge

und $b_2 = b_{r-1} + c'$, $b_{r-3} = c + c^*$ ist.

Zusatz. Der Satz gilt auch noch für $r = 6$, wenn man $b_3, \ldots, b_{r-4}$ als leere Folge deutet, und liefert dann die Bedingung $c' c^* = Q - 1$.

Anmerkung. Von den beiden Bedingungen in Zeile 3 und 4 des Satzes 9 kommt, falls $c' = 0$, nur die erste; falls $c^* = 0$, nur die zweite in Frage. Ist $c' > 0$ und $c^* > 0$, so sind sie nach Satz 2 (I 692) äquivalent; $c' = c^* = 0$ ist durch Satz 8 ausgeschlossen.

Erwähnt sei noch der unmittelbar evidente

Satz 10. *Ist von den beiden Folgen des Satzes 2* (I 692) *die eine maximal oder minimal, so hat die andere die nämliche Eigenschaft.*

Dabei ist zu beachten, daß aus den Definitionen folgt: Keine Q, c-Folge kann gleichzeitig maximal und minimal sein.

Aus den Beispielen des § 2 (I 688—689) ersieht man:

Für $r = 1$ und $r = 2$ existiert keine minimale Q, c-Folge, für $r = 3$ höchstens eine mit

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{Q-c}{c+1}.$$

Weiter findet man unter Benützung des Satzes 8 durch leichte Rechnung: Auch für $r = 5$ existiert höchstens eine minimale Folge mit

$$b_1 = b_3 = 1, \qquad b_2 - c = b_4 = \frac{Q-c}{c+1}.$$

Daher ist es bemerkenswert, daß für $r = 4$ keine minimale Q, c-Folge existiert. Das sieht man so: Die entsprechende Gleichung (I 688) geht, wenn man in ihr

$$b_3 = \frac{Q-c}{c+1}$$

setzt und den Nenner wegschafft, über in

(48) $$Q(b_1b_2 - b_2 + 1) + c^2(b_1b_2 - b_1 + 1) + c(b_2 - b_1 - 1) - 1 = 0.$$

Für jedes Paar natürlicher Zahlen b_1, b_2 wird

$$b_1b_2 - b_2 + 1 \geq 1, \quad b_1b_2 - b_1 + 1 \geq 1,$$

also, wenn man noch beachtet, daß $1 \leq c \leq Q - 1$ ist, die linke Seite von (48) sicher größer als

$$c(b_1b_2 - b_2 + 1) + c(b_1b_2 - b_1 + 1) + c(b_2 - b_1 - 1) - c = 2cb_1(b_2 - 1) \geq 0.$$

Somit hat die Gl. (48) keine Lösung in unserem Sinn.

§ 9

Die vorstehende Ergänzung der früheren Ergebnisse erlaubt jetzt, auch für $Q = 3$ die Q, c-Folgen in Klassen einzuteilen, da hier nur folgende vier Fälle möglich sind:

1. $c = 0$, 2. $c = 1$ minimal, 3. $c = 1$ maximal, 4. $c = 2$ maximal.

Für die entsprechend numerierten Klassenzahlen $n_j(r)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ liefern die Sätze 3, 5 und 9 die Rekursionsformeln

(49) $$n_1(r) = n_1(r-2) + n_2(r-2) + n_3(r-2) + n_4(r-2) \quad (r \geq 4),$$

(50) $$n_2(r) = 2n_1(r-4) + n_2(r-4) + n_3(r-4) + n_4(r-4) \quad (r \geq 6),$$

(51) $$n_3(r) = n_4(r) = 2n_1(r-2) + n_2(r-2) + n_3(r-2) + n_4(r-2) \quad (r \geq 4).$$

Subtrahiert man einerseits (49) von (51), andererseits (49) mit $r-2$ statt r von (50), so erhält man

(52) $$n_3(r) = n_4(r) = n_1(r) + n_1(r-2) \quad (r \geq 4),$$

(53) $$n_2(r) = n_1(r-2) + n_1(r-4) \quad (r \geq 6).$$

Schreibt man jetzt (52) und (53) mit $r-2$ statt r und setzt die Ergebnisse in (49) ein, so bekommt man die Rekursionsformel

(54) $$n_1(r) = 3n_1(r-2) + 3n_1(r-4) + n_1(r-6) \quad (r \geq 8).$$

Indem man für die Anfangswerte von r die nötigen Anzahlen direkt berechnet, kommt man zu folgendem Ergebnis:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
$n_1(r)$	1	0	1	2	4	6	15	24	58	92	223 ...
$n_2(r)$	0	0	1	0	1	2	5	8	19	30	73 ...
$n_3(r) = n_4(r)$	0	1	1	2	5	8	19	30	73	116	281 ...

Unter Heranziehung dieser Übersicht verifiziert man mittels der vorhergehenden Formeln:

(55) $$n_j(r) = 3n_j(r-2) + 3n_j(r-4) + n_j(r-6) \quad (j = 1, 2, 3, 4; r \geq 9).$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt, welche Klassen für $r \leqq 6$ (im Falle 2 für $r \leqq 8$) auftreten. Leere Klassen sind durch Striche bezeichnet. Unbefriedigend

Fall 1: $c = 0$

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	leere Folge				
2	—				
3	b_1	$3b_1$			
4	b_1	2	$3b_1+1$		
	b_1	1	$3b_1+2$		
5	b_1	$3b_3$	b_3	$3b_1$	
	b_1	1	1	$3b_1+1$	
	b_1	2	3	$3b_1+1$	
	b_1	1	3	$3b_1+2$	
6	b_1	$3b_4+1$	2	b_4	$3b_1$
	b_1	$3b_4+2$	1	b_4	$3b_1$
	b_1	2	2	4	$3b_1+1$
	b_1	2	3	3	$3b_1+1$
	b_1	1	3	3	$3b_1+2$
	b_1	1	4	2	$3b_1+2$

Fall 2: $c = 1$ minimal

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	—						
2	—						
3	1	1					
4	—						
5	1	2	1	1			
6	1	2	3	1	1		
	1	3	2	1	1		
7	1	1	b_3	$3b_3+1$	1	1	
	1	2	3	3	1	1	
	1	2	1	2	1	1	
	1	3	3	2	1	1	
	1	$3b_3+1$	b_3	1	1	1	
8	1	1	b_3	2	$3b_3+2$	1	1
	1	1	b_3	1	$3b_3+3$	1	1
	1	2	3	3	3	1	1
	1	2	4	2	3	1	1
	1	3	2	4	2	1	1
	1	3	3	3	2	1	1
	1	$3b_4+3$	1	b_4	1	1	1
	1	$3b_4+2$	2	b_4	1	1	1

Fall 3: $c = 1$ maximal

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1					
2	2				
3	3	2			
4	3	3	2		
	4	2	2		
5	2	b_2	$3b_2+1$	2	
	3	1	2	2	
	3	3	3	2	
	4	3	2	2	
	$3b_2+2$	b_2	1	2	
6	2	b_2	2	$3b_2+2$	2
	2	b_2	1	$3b_2+3$	2
	3	3	3	3	2
	3	4	2	3	2
	4	2	4	2	2
	4	3	3	2	2
	$3b_3+3$	2	b_3	1	2
	$3b_3+4$	1	b_3	1	2

Fall 4: $c = 2$ maximal

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
—				
1				
3	1			
3	3	1		
2	4	1		
$3b_2+1$	b_2	2	1	
2	1	3	1	
3	3	3	1	
2	3	4	1	
1	b_2	$3b_2+2$	1	
$3b_3+2$	2	b_3	2	1
$3b_3+3$	1	b_3	2	1
3	3	3	3	1
3	2	4	3	1
2	4	2	4	1
2	3	3	4	1
1	b_2	2	$3b_2+3$	1
1	b_2	1	$3b_2+4$	1

ist, daß hier im Gegensatz zu $Q = 2$ auch Folgen auftreten, die im Sinne der seinerzeitigen Definition (I 688) unbrauchbar sind. Für die übrigen berechnen sich die Zahlen b_0, D, b_r nach den Formeln des § 1, die hier nochmals angeführt seien:

$$2b_0 - c = (-1)^{r-1} Q B_{r-2} B_{r-3,1} + m B_{r-1},$$
$$D - b_0^2 = (-1)^{r-1} Q B_{r-3,1}^2 + m B_{r-2,1},$$
$$Q b_r = 2(b_0 - c).$$

Dabei ist für m jede ganze Zahl zulässig, die noch gewissen Bedingungen (I 687) genügt. Hat man für eine bestimmte Q, c-Folge die Größen b_0, D, b_r schon mittels m berechnet, so kann man die zu irgendeinem anderen Parameter $m' = m + x$ gehörigen Werte b_0', D', b_r' noch bequemer finden als mit Hilfe der vorstehenden Formeln; aus diesen folgt nämlich

$$\text{(56)} \qquad \begin{cases} b_0' - b_0 = \frac{1}{2} x B_{r-1}, \\ b_0'^2 - b_0^2 = x b_0 B_{r-1} + \frac{1}{4} x^2 B_{r-1}^2, \end{cases}$$

$$\text{(57)} \qquad \begin{cases} D' - D = b_0'^2 - b_0^2 + x B_{r-2,1} \\ \qquad = x(b_0 B_{r-1} + B_{r-2,1}) + \frac{1}{4} x^2 B_{r-1}^2 \\ \qquad = x A_{r-1} + \frac{1}{4} x^2 B_{r-1}^2, \end{cases}$$

wobei A_{r-1} mittels b_0 zu berechnen ist[1]);

$$\text{(58)} \qquad b_r' - b_r = \frac{x}{Q} B_{r-1}.$$

Dabei ist wichtig, daß für x nur solche Zahlen in Frage kommen, für welche die Beziehungen

$$\text{(59)} \qquad Q \mid x,\ 2 \mid x B_{r-1},\ x B_{r-1} > 2(c - b_0)$$

gleichzeitig gelten; das folgt aus den erwähnten Bedingungen, denen m und m' genügen müssen.

Durch den Satz 2 (I 692) wird jeder Klasse des Falles 2 eine ebensolche (unter Umständen die nämliche) zugeordnet. Die Tabelle ist so angelegt, daß in diesem Sinn bei festem r jeweils die erste Zeile der letzten, die zweite der vorletzten usw. entspricht. Der nämliche Satz paart jede Klasse des Falles 3 mit einer solchen des Falles 4; diese Paare stehen jeweils in der nämlichen Tabellenzeile.

[1]) Vgl. Schmidt, Hermann: Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen. Math. Z. **52**, 168—192 (1950); hier S. 179.

(13b) Alzing, Post Bergen 2, Dr. Liegl-Str. 10

(Eingegangen am 6. Juni 1956)

Tietze, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 188—202 (1957)

Über Schachturnier-Tabellen

Herrn Georg Faber zum 80. Geburtstag am 5. April 1957 gewidmet

Von

Heinrich Tietze

§ 1. Einleitung

Lieber Faber! Was ich Ihnen mit meinen herzlichsten Wünschen zu Ihrem 80. Geburtstag vorlege, sind nur Bruchstücke, zum Teil wohl noch stammend aus der Zeit unserer Schachpartien in einem kleinen Freundeskreis. Es handelt sich um ein bescheidenes kombinatorisches Problem, dessen hier noch nicht vollständig gegebene Lösung (vgl. Nr. 3) vielleicht einer geschickteren Hand unschwer gelingt. Um auch jemandem, der mit dem Wesen von Schachturnieren weniger vertraut ist, verständlich zu sein, wird zu Beginn der folgenden Entwicklungen einiges auseinandergesetzt, was Ihnen seit langem geläufig ist.

1. Beim Schach sind es *zwei* Gegner, die miteinander eine Partie austragen, abweichend zum Beispiel von vielen Kartenspielen, bei denen drei oder vier Spieler an einem Spiel beteiligt sind (über analoge Fragen für solche Spiele vgl. Nr. 5). Dabei ist die Situation der beiden Schachgegner nicht die gleiche und man unterscheidet den, der die *weißen* und den, der die *schwarzen* Steine führt. Wenn nun ein Turnier veranstaltet wird, bei dem p die Anzahl der daran teilnehmenden Spieler ist, so wird es in der Regel so eingerichtet, daß im Laufe des Turniers jeder Spieler mit jedem anderen eine Partie[1]), jeder also insgesamt $p-1$ Partien spielt, wobei außerdem getrachtet wird, daß jeder Spieler innerhalb der Gesamtheit seiner Partien ungefähr gleich viel Partien mit den weißen, wie mit den schwarzen Steinen zu spielen hat.

Zur Erledigung aller dieser $\frac{1}{2}p(p-1)$ Partien müssen die Spieler des öfteren zusammenkommen — eine solche Zusammenkunft wird eine „Runde" genannt — und damit sich das Turnier nicht über eine zu lange Zeit erstreckt, wird man trachten, daß bei einer Runde möglichst viele der p Turnierspieler beschäftigt, also möglichst wenige „spielfrei" sind. Man sucht also, es so

[1]) Gelegentlich sind wohl auch „Doppelrunden-Turniere" vorgekommen, in denen jeder Spieler mit jedem anderen zwei Partien zu spielen hat. Da man es dabei einfach so einrichtet, daß nach einer ersten Turnierhälfte, in der jeder mit jedem eine Partie gespielt hat, nun in einer zweiten Turnierhälfte dieselben Spielerpaarungen, nur mit Vertauschung von Weiß und Schwarz, vorkommen, so ergeben solche Doppelrunden-Turniere keine besonderen, über die gewöhnlichen „Einrunden-Turniere" hinausgehenden Verteilungsprobleme.

einzurichten, daß nach r Runden die Anzahl der Partien, die ein einzelner Spieler gespielt hat, bei möglichst viel Spielern gleich r oder nicht viel kleiner als r ist.

Zu dieser Forderung tritt noch eine, die die Verteilung der Farben Weiß und Schwarz auf die einzelnen Spieler betrifft. Wir sagten schon, daß jeder Spieler innerhalb des gesamten Turniers mit jeder der beiden Farben ungefähr gleich oft spielen soll. Darüber hinaus fordert man, daß bei jedem Spieler auch im Verlauf des Turniers die Zahl der Partien, die er bis dahin mit Weiß, und die Zahl der Partien, die er mit Schwarz gespielt hat, sich dauernd ungefähr die Wage halten; daß also, wenn nach r Runden ein Spieler r (oder vielleicht $r-1$) Partien gespielt hat, er in diesen Partien etwa ebenso oft (also in ungefähr $\frac{1}{2}r$ Partien) Weiß wie Schwarz hatte. Um dies zu erreichen trachtet man, es so einzuteilen, daß beim Übergang von einer Runde zur nächsten möglichst viele Spieler die Farbe der Steine, mit denen sie spielen, wechseln, d.h. daß ein Spieler, der in der einen Runde Schwarz hatte, in der nächsten mit Weiß spielt, und umgekehrt.

2. Allen diesen Forderungen kann in weitgehendem Maße entsprochen werden, wie dies die üblichen „Turnier-Tabellen" zeigen. Um diese Tabellen anzuwenden, findet zu Beginn eines Turniers eine Verlosung statt, bei der die beteiligten Spieler ihre Nummern von 1 bis p bekommen. Es gibt dann die auf die Spielerzahl p bezügliche Turnier-Tabelle für jede Runde an[2]), welche Spieler miteinander zu spielen haben; und wer mit den weißen, wer mit den schwarzen Steinen[3]).

3. In den folgenden Entwicklungen wollen wir nicht von den in der Praxis gebräuchlichen Turnier-Tabellen ausgehen, sondern von den *Forderungen*, die wir bezüglich der Zahl der in den einzelnen Runden mitwirkenden Spieler und bezüglich der Verteilung der Farben auf die p Spieler im Laufe der einzelnen Runden stellen. Diese (in § 2 aufgestellten) Forderungen geben präziser gefaßt das, was in Nr. **1** als ungefähr erstrebenswert geschildert wurde. Natürlich sind wir von vorneherein darauf bedacht, keine Forderungen aufzustellen, die sich nachher als unerfüllbar erweisen würden.

Für das Ergebnis unserer Untersuchungen wird es, wie wir sehen werden, einen Unterschied ausmachen, ob die Anzahl p der Spieler ungerade oder gerade ist: bei ungeradem p ergeben sich im wesentlichen keine anderen unseren Forderungen genügenden Turnier-Verteilungen als die durch die längst gebräuchlichen Turnier-Tabellen gegebenen; bei geradem p wird sich zeigen, daß außer den gebräuchlichen noch andere Verteilungen möglich sind. Und es bleibt hier eine offene Frage (siehe Nr. **22**, **23**), wie die Gesamtheit

[2]) Darüber, daß vormals umständlicher verfahren wurde, vgl. Anm. 6.

[3]) Dagegen wäre es gewöhnlich (nämlich abgesehen von einer ganz kleinen Zahl von Spielern) nicht angängig, zunächst nur für die erste Runde durchs Los die Verteilung der Spieler zu bestimmen, dann durch neues Losen für die zweite Runde usw. Denn es würde sich meistens bald zeigen, daß den in Nr. **1** erörterten Forderungen dann nicht entsprochen werden kann (siehe Beispiele in Nr. **8**).

aller Verteilungen beschaffen ist, die unseren Forderungen bei geradem p genügen.

Das eine aber wird allemal, ob nun p ungerade oder gerade ist, aus unseren Entwicklungen hervorgehen, nämlich daß man *keine schärferen* Forderungen an die Turnier-Verteilungen stellen kann, als diejenigen, die von den üblichen Turnier-Tabellen erfüllt werden.

4. Was solche Turnier-Tabellen betrifft, so ist es selbstverständlich, daß man aus einer brauchbaren Tabelle für p Spieler mit den Nummern 1 bis p wiederum eine brauchbare Tabelle erhält, wenn man die Nummern der Spieler irgend einer Permutation unterwirft. Zwei derart in einander überführbare Tabellen sehen wir als nicht wesentlich verschieden an.

5. Wenn ich nach Zusammenstellung der hier vorgelegten Entwicklungen etwas in der vorhandenen Literatur nachgesehen habe, inwieweit sich da wohl dieselben Ergebnisse vorfinden, so bekam ich den Eindruck, daß es den betreffenden Publikationen vor allem um den Nachweis zu tun ist, daß die mitgeteilten Verfahren geeignet sind, eine brauchbare, allen aufgestellten Forderungen genügende Turnier-Verteilung zu liefern; anders gesagt, daß diese Verfahren zur Lösung des gestellten Problems *hinreichen*. Dazu tritt nun aber die Frage, ob die gewonnene Lösung auch *notwendig* ist, in dem Sinne, daß keine andere allen Forderungen genügende Lösung vorhanden ist. Eine auf diese zweite Frage bezügliche Untersuchung habe ich an den eingesehenen Stellen nicht gefunden[4]). Gerade mit dieser Frage aber befassen sich die folgenden Entwicklungen. Die Antwort, zu der wir gelangen, lautet verschieden, je nachdem ob die Anzahl p der Spieler ungerade ist, wo die übliche Lösung, von einer trivialen Modifikation abgesehen, sich als eindeutig erweist, oder ob p gerade ist (> 2), wo wesentlich verschiedene Lösungen existieren[5]).

Ein geringeres Maß von Forderungen als bei Schachturnieren tritt bei anderen kombinatorischen Aufgaben auf, die in verschiedenen Gestalten gestellt worden sind. Bei diesen Aufgaben (Spaziergänge eines Pensionats, Organisation eines Fechtturniers) entfällt diejenige Unterscheidung zwischen den beiden Elementen eines Paares, die sich beim Schach durch die Zuweisung der weißen bzw. schwarzen Steine für die Spieler einer Partie ergibt.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien einige Literaturangaben gebracht. Zunächst für das Problem der Schachturnier-Tabellen: W. AHRENS, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., Bd. II (1918), Kap. XIV, Abschnitt 1, § 2, S. 79—94. M. KRAITCHIK, La Mathématique des Jeux, ou Récréations Mathématiques, 1930, Chap. 18, Nr. 1—4, S. 540—546. Siehe auch W. AHRENS, Mathematische Spiele, Artikel I G 1 der Encyklopädie der

[4]) Hier möchte allerdings auf seinen Briefwechsel aus 1907 und 1909 mit ROBERT REMAK über die Frage nach verschiedenen Paarungs-Tabellen hingewiesen werden, den W. AHRENS in „Mathematische Unterhaltungen und Spiele", 2. Aufl., Bd. II (1918), S. 92 erwähnt.

[5]) Dies gilt, abweichend von gegenteiligen Behauptungen, schon für $p = 4$ (vgl. Nr. **23**).

math. Wiss., Bd. I, Teil 2 (1900—1904), Anm. 3, S. 1081. Aus der Zeit, wo über Herstellung von Turnier-Tabellen diskutiert[6]) wurde: R. Schurig, Deutsche Schachzeitung, 41. Jg., Leipzig 1886, S. 134 u. 169 (in diesem Aufsatz werden die heute vorwiegend benützten Tabellen entwickelt; vgl. Nr. **18**, Anm. 22).

Über allgemeinere Fragen der Aufteilung von Teilnehmern auf Paare vgl. E. Lucas, Récréations Mathématiques, t. II (1883), S. 176ff.

Über verwandte Fragen speziell über Tripelsysteme (anstelle der Paarungen beim Schach), die von D. P. Kirkman und J. Steiner gestellt wurden, siehe Encyklop. d. math. Wiss., I. Bd., I. Teil, Art. I A 2, Netto, Nr. **10**, S. 33; eine ausführliche Darstellung in W. W. Rouse Ball, Mathematical recreations and problems, 2d ed., 1892, S. 89. Neuere Arbeiten von S. Bays, Th. Skolem, H. Hasse, R. D. Carmichael (1931—1933), dann von S. Bays und E. de Weck (Vierersysteme), M. H. Martin, H. S. White (1935), ferner von R. C. Bose (1939) findet man im Zentralblatt, Bde. 1, 2, 3, 5 bzw. 10, 11 bzw. 23 referiert.

Speziell über Verteilungsprobleme für Spiele, bei denen, nicht wie beim Schach zwei, sondern mehr Spieler ein Spiel austragen, vgl. eine Untersuchung über Whist-Turniere von $4n$ Teilnehmern von E. H. Moore, Amer. Journ. of Math. **18** (1896) S. 290—303; siehe ferner Peltesohn Rose, Das Turnierproblem für Spiele zu je dreien, Berlin Diss. 1936 (Referat von Bays, Zentralblatt, Bd. 13).

§ 2. Die genauen Forderungen an eine Turnier-Tabelle

6. Da die Anzahl der in einer Runde beschäftigten Spieler notwendig gerade ist, so ist klar, daß bei ungeradem $p = 2n - 1$ in jeder Runde eine ungerade Anzahl von Spielern, also mindestens ein Spieler spielfrei bleiben muß, während bei geradem $p = 2n$ in jeder Runde sich eine gerade Anzahl spielfreier Spieler ergibt, soferne nicht überhaupt kein Spieler spielfrei ist.

Wir werden nun an die aufzustellenden Turnier-Tabellen bezüglich spielfreier Spieler die schärfsten denkbaren Forderungen stellen; nämlich:

I a. Bei ungeradem p soll in jeder Runde nur ein einziger Spieler spielfrei sein. Demgemäß sollen in jeder Runde $p - 1$ Spieler beschäftigt, also $\frac{1}{2}(p-1)$ Partien gespielt werden. Um also alle $\frac{1}{2}p(p-1)$ Partien des Turniers zu absolvieren, sind genau p Runden erforderlich; und da jeder der p Spieler $p - 1$ Partien zu absolvieren hat, muß er in allen Runden bis auf eine einzige, in der er spielfrei bleibt, beschäftigt sein; in den einzelnen p Runden ist also der Reihe nach jeder Spieler einmal spielfrei.

[6]) Statt einer einzigen Auslosung wurden beispielsweise bei einem Meisterturnier 1877 zwei Verlosungen, — eine für die Paarungen der Spieler, eine zweite für die Reihenfolge der Runden — vorgenommen, und dies zur Vereinfachung früherer noch umständlicherer Verfahren; siehe E. Schallopp, Der Schachkongreß zu Leipzig 1877, Leipzig 1878, S. 33—34.

Ib. Bei geradem p soll es in keiner Runde einen spielfreien Spieler geben. In jeder Runde sollen also $\frac{1}{2}p$ Partien gespielt werden, und man braucht $p-1$ Runden, um alle $\frac{1}{2}p(p-1)$ Partien des Turniers zu erledigen.

7. Was ferner den Wechsel der weißen und schwarzen Steine bei jedem einzelnen Spieler betrifft, so lassen sich, wie sich zeigen wird, die folgenden Forderungen erfüllen.

IIa. Bei ungeradem p soll jeder Spieler in zwei aufeinanderfolgenden der von ihm gespielten Partien stets die Farbe der Steine, mit denen er spielt, wechseln. Dabei wird, wenn er in einer Runde eine Partie gespielt hat, die nächste von ihm zu spielende Partie im allgemeinen in der nächsten Runde zu spielen sein; und nur dann in der übernächsten Runde, wenn er in der nächsten Runde spielfrei ist.

Aus IIa folgt, daß jeder Spieler in genau $\frac{1}{2}(p-1)$ seiner Partien Weiß, in ebensoviel Partien Schwarz hat.

IIb. Bei geradem p soll es bei jedem Spieler höchstens einmal vorkommen, daß er in zwei aufeinanderfolgenden Partien mit derselben Farbe spielt; im übrigen soll er von jeder Partie zur nächsten stets die Farbe wechseln.

Da die Zahl $p-1$ der Partien, die ein Spieler spielt, ungerade ist, kann er natürlich nicht gleich oft Weiß wie Schwarz bekommen. Aus IIb aber folgt, daß er nur genau einmal mehr mit der einen Farbe als mit der anderen zu spielen hat[7]).

8. In den folgenden Entwicklungen (§§ 3—5) besprechen wir die Konsequenzen, die die aufgestellten Forderungen für die Konstruktion von Turnier-Tabellen nach sich ziehen. Dabei mögen vorher noch einige Beispiele zeigen, daß man, wie schon in Anm. 3 bemerkt, ins Gedränge kommen kann, wenn man ohne einen Gesamtplan für das ganze Turnier, einfach durch schrittweises Verlosen für die einzelnen Runden die Verteilung der Spieler bestimmen wollte.

In einem ersten Beispiel handle es sich um $p=5$ Spieler, wobei wir annehmen, daß zunächst die Reihenfolge verlost wurde, in der die Spieler in den einzelnen Runden spielfrei sind. In dieser Reihenfolge mögen die Spieler selbst mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet werden. Für die erste Runde habe dann eine Verlosung im einzelnen die Verteilung ergeben:

$$(R_1) \qquad (1),\ 5-2,\ 4-3,$$

also 1 spielfrei, 2 habe 5 zum Gegner bekommen, 3 spielt somit gegen 4; und die Verlosung der Farben habe für 5 und 4 Weiß ergeben. Für die nächste Runde, wo 2 seinen freien Tag hat, möge sich beim Auslosen des Gegners von

[7]) Eine weitere Forderung III, die darauf hinausläuft, Tabellen für ungerade Spieleranzahlen entbehrlich zu machen, wird erst am Schluß (in Nr. **25**) kurz erwähnt werden.

1 der Spieler 4 ergeben haben[8]); die andere Partie wird dann zwischen 3 und 5 gespielt, sodaß die zweite Runde — unter Beachtung der Farben, die sich aus Forderung IIa ergeben, — lautet:

(R_2) $\qquad (2),\ 1-4,\ 3-5.$

Für die dritte Runde, in der 3 spielfrei ist, kämen nun als Gegner von 1 nur 2 oder 5 in Frage. Im ersten Fall, wo sich die Partie $2-1$ ergäbe, könnte die andere Partie zwischen 4 und 5 nicht zustandekommen, weil diese Spieler gemäß IIa beide mit Weiß zu spielen hätten. Im zweiten Fall, wo sich die Partie $5-1$ ergäbe, fiele die andere Partie aus, weil 3 und 4 ihre Partie schon in (R_1) absolviert haben. Eine allen Forderungen genügende Weiterführung des Turniers erwiese sich also als unmöglich.

In einem zweiten Beispiel mit $p=6$ Spielern seien auf Grund schrittweiser Verlosungen die drei Runden

$$1-4,\ 6-2,\ 3-5;$$
$$2-1,\ 4-3,\ 5-6;$$
$$1-6,\ 2-3,\ 4-5$$

gespielt worden. Der Forderung IIb gemäß müßte nun der Spieler 2, da er zweimal nacheinander Weiß hatte, in der vierten Runde Schwarz, in der fünften und letzten Runde Weiß bekommen. Ganz dasselbe würde aber für den Spieler 4 gelten. In keiner dieser Runden könnte also die Partie zwischen den Spielern 2 und 4 zustandekommen.

Übrigens können schon für $p=4$ durch planlose Verlosungen Schwierigkeiten entstehen. Falls in der ersten Runde die Spieler 1, 2 und 3, 4 ihre Partien spielten, in der zweiten Runde 1, 3 und 2, 4 und man jedesmal den Spielern die Auslosung der Farben überließ und sich dabei die Partien

$$1-2,\ 4-3;$$
$$1-3,\ 4-2$$

ergaben, dann müßte in der dritten und letzten Runde gemäß Forderung IIb sowohl der Spieler 2 als auch der Spieler 3 die Farbe Weiß bekommen, sodaß die zwischen ihnen noch ausständige Partie nicht zustandekäme; und das Entsprechende gilt für die Partie zwischen 1 und 4, die beide Schwarz bekommen müßten[9]).

[8]) Für diese Auslosung kam 5 als Gegner von 1 überhaupt nicht in Frage, da sonst die andere in dieser Runde zu spielende Partie von 3 und 4 zu spielen gewesen wäre, die ihre Partie schon in (R_1) absolviert haben. Wäre aber 3 als Gegner von 1 ausgelost worden, so hätte man diese Verlosung annullieren müssen, denn die andere Partie wäre dann zwischen den Spielern 4 und 5 auszutragen gewesen, der eine mit den weißen, der andere mit den schwarzen Steinen, während doch jeder, weil er in (R_1) mit Weiß spielte, nunmehr nach Forderung IIa Schwarz bekommen müßte, — dies schon ein Zeichen der Verlegenheiten bei aufs Gerathewohl vorgenommenen Auslosungen!

[9]) Analoge Schwierigkeiten können sich bei etwas größerer Teilnehmerzahl durch planlose Abpaarungen auch dann ergeben, wenn man die auf die Farbenverteilung bezüglichen Forderungen IIa, IIb ganz unberücksichtigt läßt und nur Ia, Ib beachtet, also Verteilungen im Auge hat, wie sie bei Fechtturnieren oder bei der Aufgabe über paarweise geordnete Spaziergänge eines Pensionats (siehe Nr. 5) sich ergeben.

§ 3. Die zulässigen Typen der Farbenverteilung

9. Wir beginnen mit dem Fall einer *ungeraden* Spielerzahl $p = 2n-1$ $(n \geqq 2)$. Betrachten wir der Reihe nach die Runden $r = 1, 2, \ldots, p$, so ist gemäß Ia (Nr. 6) jeder Spieler charakterisierbar durch die Nummer $r = i$ der Runde, in der er spielfrei ist. Dann bestehen bezüglich der Farben[10]), mit denen er in den Runden $r \leqq i$ spielt, gemäß IIa (Nr. 7) nur zwei Möglichkeiten. Die eine dieser Möglichkeiten liegt vor, wenn er in der Runde $i+1$, also der ersten Runde, nachdem er spielfrei war, die Farbe $+1$ hat, und gemäß IIa dann ebenfalls $+1$ in den Runden $i+3, i+5, \ldots (\leqq p)$, dagegen die Farbe -1 in den Runden $i+2, i+4, \ldots (\leqq p)$; ferner hat er gemäß IIa die Farbe -1 in den Runden $i-1, i-3, \ldots (\geqq 1)$ und die Farbe $+1$ in den Runden $i-2, i-4, \ldots (\geqq 1)$. Der Typus der Farbenverteilung des Spielers sieht dann so aus:

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{Runde } \ldots, & i-3, & i-2, & i-1, & i, & i+1, & i+2, & i+3, \ldots \\ \text{Farbe } \ldots & - & + & - & * & + & - & + \ \ldots, \end{cases}$$

ein Typus, den wir abgekürzt mit $[i*-]$ bezeichnen wollen[11]). Natürlich entfallen die Runden $r < i$, wenn $i = 1$ ist; und es entfallen die Runden $r > i$, wenn $i = p$ ist.

Die zweite der genannten Möglichkeiten liegt vor, wenn der Spieler, der in der Runde $r = i$ spielfrei ist, in der Runde $i+1$ die Farbe -1, dagegen in der Runde $i-1$ die Farbe $+1$ hat. Seine Farbenverteilung ergibt sich aus (1), indem man durchwegs $+$ und $-$ vertauscht. Der so gekennzeichnete Typus werde mit $[i*-]$ bezeichnet.

10. Bei *geradem* $p = 2n$ $(n \geqq 2)$ betrachten wir zunächst die Typen der Farbenverteilung für diejenigen Spieler, die einmal öfter mit Weiß $(+)$ als mit Schwarz $(-)$ spielen, also in $\frac{1}{2}p = n$ Runden Weiß haben und in $\frac{1}{2}p - 1 = n-1$ Runden Schwarz. Ein solcher Typus liegt speziell dann vor, wenn der Spieler in der ersten Runde $+$ hat und dann dauernd die Farbe wechselt, so daß seine Farbenverteilung so aussieht:

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Runde} & 1, & 2, & 3, \ldots, & p-2, & p-1 \\ \text{Farbe} & + & - & + \cdots & - & + \ . \end{cases}$$

Ferner gehören hierher die Fälle, wo der Spieler in zwei aufeinanderfolgenden Runden, etwa $r = i$ und $r = i+1$ $(1 \leqq i \leqq p-2)$ mit $+$ spielt und im übrigen

[10]) Zur Kennzeichnung der Farbe Weiß schreiben wir zur Abkürzung $+$, für Schwarz analog $-$. Statt $+$ und $-$ schreiben wir auch $+1$ und -1; das wird sich speziell dann als bequem erweisen, wenn wir später gelegentlich Aussagen zu machen haben, wie die, daß ein Spieler mit Weiß oder mit Schwarz spielt, je nachdem ob eine auftretende Zahl m gerade oder ungerade ist; wir können dann einfach sagen, er spielt mit der Farbe $(-1)^m$.

[11]) Dieses Zeichen mag im Hinblick auf (1) so gedeutet werden, daß bei i ein Stern $*$ steht, darauf dann ein $+$ folgt; ausführlicher könnte man dafür $[i*, (i+1)+]$ schreiben.

fortwährend die Farbe wechselt, was das Bild gibt:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{Runde } \ldots,\ i-2,\ i-1,\ i,\ i+1,\ i+2,\ i+3,\ i+4,\ \ldots \\ \text{Farbe } \ldots\ +\quad -\quad +\quad +\quad -\quad +\quad -\ \ldots, \end{cases}$$

wobei natürlich, wenn $i=1$ bzw. $i=p-2$ ist, die Runden $r<i$ bzw. $r>i+1$ wegfallen.

Der Typus der durch (3) gekennzeichneten Farbenverteilung werde zur Abkürzung mit $[i+]$ bezeichnet[12]; ferner mit $[(p-1)-]$ der Typus, der durch (2) dargestellt wird[13].

Aus den soeben besprochenen Typen, wo der Spieler einmal öfter + als − hat, ergeben sich die Typen, wo er einmal öfter − als + hat, durch Vertauschung von + mit −. Diese Typen werden wir abgekürzt mit $[i-]$ bezeichnen $(1\leq i\leq p-1)$.

§ 4. Turnier-Verteilungen bei ungeradem p

11. In Nr. **9** haben wir mit den Spielertypen $[i*+]$ und $[i*-]$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ insgesamt $2p$ mögliche Typen festgestellt. Bei einem Turnier können natürlich niemals zwei Spieler den gleichen Typus aufweisen, da es ja eine Runde geben muß, in der sie gegen einander zu spielen haben, somit verschiedene Farben aufweisen. Die p Spieler werden also p verschiedene Typen repräsentieren: In einem Turnier tritt eine bestimmte *Kombination von p Spielertypen* auf. Unsere erste Aufgabe wird es sein, festzustellen, welche Kombinationen von p Typen in einem und demselben Turnier möglich sind. Nachher (Nr. **13**—**17**) wird — als zweite Aufgabe — für eine solche Kombination von Typen zu ermitteln sein, welche Paarungen der Spieler in den einzelnen Runden mit einer solchen Kombination in Einklang stehen; und ob es zu einer solchen Kombination nur ein einziges System von Paarungen der Spieler gibt, oder ob bei gleicher Typen-Kombination mehrere „Turnier-Verteilungen" möglich sind. Es wird sich zeigen, daß nur *eine*, durch die Kombination der Spielertypen also eindeutig bestimmte Turnier-Verteilung existiert[14].

12. Da gemäß Nr. **6** (Forderung Ia) und **9** in jeder Runde $r=i$ genau ein Spieler spielfrei ist, so ist unter den Spielern für jedes i von den beiden Typen $[i*+]$ und $[i*-]$ genau einer vertreten.

Wir vergleichen nun den Typus $[i*+]$ mit $[(i+1)*-]$, der eine dargestellt durch (1), der andere durch:

$$(4)\quad \begin{cases} \text{Runde } \ldots,\ i-3,\ i-2,\ i-1,\ i,\ i+1,\ i+2,\ i+3,\ \ldots \\ \text{Farbe } \ldots\ -\quad +\quad -\quad +\quad *\quad -\quad +\ \ldots. \end{cases}$$

[12]) Im Hinblick auf den Anblick von (3) wäre $[i+, (i+1)+]$ eine ausführlichere Kennzeichnung für diesen Typus; vgl. Anm. **11**.

[13]) Man mag hierbei an eine zyklische Anordnung der Runden denken, so daß auf die Runde $i=p-1$ die Runde $i=1$ folgt, was man auch so auffassen kann, daß man die Nummern der Runden mod. $p-1$ betrachtet.

[14]) Verglichen mit diesen einfachen Verhältnissen bei ungeradem p herrscht bei geradem p eine wesentlich größere Mannigfaltigkeit (vgl. § 5, Nr. **23**, **24**).

Man sieht nun sofort:

Satz 1. Es ist ausgeschlossen, daß in einem Turnier sowohl der Spieler vom Typus $[i*+]$ als auch der vom Typus $[(i+1)*-]$ vorkommt.

Denn in irgend einer Runde müßten die beiden Spieler miteinander eine Partie austragen, der eine mit $+$, der andere mit $-$. Die Runden $r=i$ und $r=i+1$ scheiden dafür aus, weil hier jedesmal einer der beiden Spieler spielfrei ist. In allen anderen Runden, also $r<i$ und $r>i+1$ stimmen aber die beiden Spieler, wie der Vergleich von (1) mit (4) zeigt, in den Farben überein, können einander also nicht in einer Partie begegnen[15]).

Genau so ergibt sich, daß in einem Turnier nicht sowohl der Typus $[i*-]$ als auch der Typus $[(i+1)*+]$ vorkommen kann. Da nun nach dem oben Gesagten von den beiden Typen $[(i+1)*+]$, $[(i+1)*-]$ notwendig einer vorkommen muß, so sehen wir, daß zugleich mit $[i*+]$ nur $[(i+1)*+]$, zugleich mit $[i*-]$ nur $[(i+1)*-]$ vorkommen kann. Wenn man das der Reihe nach von $i=1$ bis $i=p-1$ beachtet, ergibt sich:

Satz 2. Bei einem Turnier mit ungerader Spieleranzahl p sind keine anderen Kombinationen von Spielertypen möglich, als die aus den Typen

$$[1*+],\ [2*+],\ \ldots,\ [p*+] \tag{5}$$

und die aus den Typen

$$[1*-],\ [2*-],\ \ldots,\ [p*-] \tag{6}$$

bestehende.

Wir wollen eine Kombination von Spielertypen *„realisierbar"* nennen, wenn es wenigstens eine den Forderungen von § 2 genügende Verteilung aller $\frac{1}{2}p(p-1)=(2n-1)(n-1)$ Partien zwischen den p Spielern gibt, welche diese Kombination von Typen aufweist. Satz 2 kann dann so ausgesprochen werden:

Satz 3. Realisierbar kann keine von (5) und (6) verschiedene Kombination sein.

Da wir nun tatsächlich Partie-Verteilungen werden auffinden können (Nr. **13**—**17**), die mit (5) bzw. (6) in Einklang stehen, so wird damit die erste der in Nr. **11** gestellten Aufgaben gelöst sein.

13. Wir betrachten den ersten Fall[16]), also den durch die Typen (5) dargestellten. Die folgenden Entwicklungen werden nun nicht nur die Realisierbarkeit von (5), also die Existenz einer (5) aufweisenden Turnier-Verteilung zeigen, sondern darüber hinaus, daß für alle Runden $r=1, 2, \ldots, p$ die Turnier-

[15]) Dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, für $[p*+]$ und $[1*-]$. Man könnte diese Aussage dem Satz 1 einordnen, wenn man festsetzt, daß für $i=p$ unter $i+1=p+1$ nichts anderes als 1 verstanden werden soll. Die hierin auftretende Erscheinung, daß die vorkommenden Zahlen modulo p zu betrachten sind, werden wir später noch öfter antreffen.

[16]) Auf diesen wird sich der zweite Fall mit den Typen (6) ohne weiteres zurückführen lassen (Nr. **17**).

Verteilung — also wie die Spieler gepaart sind und mit welcher Farbenverteilung — eindeutig durch unsere Forderungen festgelegt ist. Dabei werden uns gewisse Vorstellungen dienlich sein, die wir jetzt einführen wollen.

Zunächst betrachten wir eine Kreislinie L, die in p gleiche Teile geteilt sei („Elementarbogen" von der Bogenlänge $2\pi:p$), so daß die Teilungspunkte die Ecken eines regelmäßigen p-Ecks bilden. Nach Wahl eines positiven Umlaufssinnes (etwa den im Sinn des Uhrzeigers) denken wir uns den p Ecken der Reihe nach die Nummern $1, 2, \ldots, p$ gegeben, wobei nun 1 als der auf p nächstfolgende Punkt erscheint[17]). Irgend zwei Eckpunkte, etwa a und b, zerlegen nun den Kreis in zwei ungleiche Teilbogen, von denen der eine, den wir den „inneren" Bogen nennen, eine gerade Anzahl $2h$ von Elementarbogen umfaßt ($1 \leqq h \leqq n-1$), der andere — der „äußere" Bogen — eine ungerade Anzahl $p-2h$ (wo $1 \leqq p-2h \leqq p-2$). Denken wir den ersteren, also den inneren Bogen, in positivem Sinn durchlaufen, und sei i die Nummer des Anfangspunktes (wo entweder $i=a$ oder $i=b$ ist), so kann der Endpunkt (also der andere der beiden Punkte a, b) mit $i+2h$ bezeichnet werden, soferne man diese Bezeichnung mod. p nimmt (also $i+2h$, falls $>p$, durch $i+2h-p$ ersetzt). Von Interesse ist dann noch, wenn wir die Sehne zwischen den Punkten a, b und den auf ihr senkrechten Kreisdurchmesser betrachten, derjenige Eckpunkt unseres Polygons, der auf diesem Durchmesser liegt. Es ist das der Punkt, der den inneren Bogen halbiert, und es kommt ihm die Nummer $i+h$ zu[18]). Das Ergebnis der folgenden Überlegungen wird dann sein:

Satz 4. Wenn für zwei Spieler $[a*+]$, $[b*+]$ in der eben geschilderten Weise die Ecken mit den Nummern a, b auf L einen inneren Bogen mit $2h$ Elementarbogen bilden, sodaß diese Nummern durch i und $i+2h$ bezeichnet werden können[19]), dann findet die Partie zwischen diesen Spielern notwendig in der Runde $r=i+h$ statt[20]), wobei der Spieler $[i*+]$ mit der Farbe $(-1)^{h-1}$, der Spieler $[(i+2h)*+]$ mit $(-1)^h$ spielt.

Dieser Satz besagt beispielsweise für $p=9$ Spieler, daß die Spieler $[5*+]$, $[9*+]$, wo $i=5$, $i+2h=9$, $h=2$, $i+h=7$ ist, in der Runde $r=7$ miteinander spielen, der Spieler $[5*+]$ mit der Farbe $(-1)^{h-1}=-1$, der Spieler $[9*+]$ mit der Farbe $(-1)^h=+1$; wenn wir dagegen (wieder für $p=9$) unseren Satz anwenden auf die Spieler $[6*+]$ und $[9*+]$, wo jetzt der innere Bogen bei $i=9$ anfängt und mit $h=3$ zum Punkt $i+2h=15$ führt, der nichts anderes ist als $15-p=6$, und wo jetzt $r=i+h=12$ (modulo $p=9$) durch 3 zu ersetzen ist, dann lehrt Satz 4, daß die beiden Spieler in der Runde $r=3$ miteinander spielen, dabei der Spieler $[i*+]=[9*+]$ mit der Farbe

[17]) Anders gesagt betrachten wir die Nummern der Punkte modulo p, so daß 1 zugleich als Vertreter der Nummer $p+1$ auftritt.

[18]) Es ist das wieder — im Sinn einer Auffassung mod. p — so zu verstehen, daß man $i+h$, falls $>p$ durch $i+h-p$ ersetzt.

[19]) Wie oben besprochen ist $i+2h$, falls $>p$, durch $i+2h-p$ zu ersetzen.

[20]) Bezüglich $i+h$ gilt wieder das in Anm. 18 Gesagte.

$(-1)^{h-1}=+1$, der Spieler $[6*+]=[(i+2h)*+]=[15*+]$ mit der Farbe $(-1)^h=-1$.

14. Ehe wir den Beweis von Satz 4 (durch vollständige Induktion bezüglich h) erbringen, betrachten wir zunächst für zwei Spieler vom Typus $[a*+]$ und $[b*+]$ sowohl den durch die Punkte a, b auf dem Kreis L bestimmten „inneren Bogen" mit $2h$ Elementarbogen, als auch den ihn zum vollen Kreis L ergänzenden „äußeren Bogen", wobei i und $i+2h$ (natürlich mod. p verstanden) keine anderen Punkte bedeuten als (in geeigneter Reihenfolge) a und b. Wir sehen uns dann für die einzelnen Runden die Farben F_i und F_{i+2h} an, die dem Spieler $[i*+]$ und dem Spieler $[(i+2h)*+]$ in jeder dieser Runden zugewiesen sind. Dies mag durch

(7)
Runde	...	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	...	$i+h$	...	$i+2h-1$	$i+2h$	$i+2h+1$	...
F_i	...	+	−	*	+	...	$(-1)^{h-1}$	...	+	−	+	...
F_{i+2h}	...	+	−	+	−	...	$(-1)^h$	...	−	*	+	...

dargestellt werden. Dabei sollte man eigentlich an eine zyklische Anordnung der Runden denken, deren Nummern also den in Nr. **13** erwähnten Eckpunkten eines dem Kreis L eingeschriebenen regulären p-Ecks zugeordnet seien. Dann sind durch eine Zahl r mit $i<r<i+2h$ die Eckpunkte gekennzeichnet, die auf dem „inneren Bogen" liegen, während etwa vorhandene[21]) Eckpunkte auf dem „äußeren Bogen" teils durch $r>i+2h$ teils durch $r<i$ charakterisiert sind. Da nun, wie man aus (7) ersieht, für die Runden, deren Nummern zu Eckpunkten auf dem äußeren Bogen gehören, die Farben der beiden Spieler übereinstimmen, so scheiden diese Runden für eine Partie zwischen diesen Spielern aus, desgleichen natürlich die Runden $r=i$ und $r=i+2h$, in denen je einer der beiden Spieler spielfrei ist. Somit gilt

Satz 5. Für eine Partie zwischen den Spielern $[i*+]$ und $[(i+2h)*+]$ kommt nur eine Runde in Betracht, deren Nummer r dem „inneren Bogen" angehört, der auf L durch die Ecken i und $i+2h$ bestimmt ist.

15. Für den speziellen Fall $h=1$, der durch

(8)
Runde	...	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$	$i+3$	...
F_i	...	+	−	*	+	−	+	...
F_{i+2}	...	+	−	+	−	*	+	...

dargestellt wird, wo auf dem inneren Bogen nur der eine Eckpunkt mit der Nummer $i+1$ liegt, ergibt sich aus Satz 5 sofort

Satz 6. Die Partie zwischen den Spielern $[i*+]$ und $[(i+2)*+]$ findet notwendig in der Runde $r=i+1$ statt, wobei der Spieler $[i*+]$ die Farbe $+1$, der Spieler $[(i+2)*+]$ die Farbe -1 hat. Im Sinne einer zyklischen

[21]) Sie fallen fort, falls $h=n-1$, $i+2h=i-1+p\equiv i-1$ ist.

Anordnung ist bei $i = p - 1$ dabei unter $[(i+2)*+]$ der Spieler $[1*+]$ zu verstehen; ferner bei $i = p$ unter $[(i+2)*+]$ der Spieler $[2*+]$, wobei außerdem $r = i+1$ durch $r = 1$ zu ersetzen ist.

16. Mit Satz 6 ist die Gültigkeit von Satz 4 für $h = 1$ erwiesen. Um nun Satz 4 durch vollständige Induktion nachzuweisen, nehmen wir an, es sei $2 \leqq k \leqq n-1$ und für alle Werte h, mit $1 \leqq h \leqq k-1$, sei die Gültigkeit von Satz 4 erkannt. Diese Annahme besagt dann, daß der Spieler $[i*+]$ der Reihe nach in den Runden $r = i+1, \ldots, r = i+h, \ldots, r = i+k-1$ mit den Spielern $[(i+2)*+], \ldots, [(i+2h)*+], \ldots, [(i+2k-2)*+]$ zu spielen hat; desgleichen besagt unsere Annahme, daß die Spieler $[(i+2k-2)*+], \ldots, [(i+2k-2h)*+], \ldots, [(i+2)*+]$ der Reihe nach in den Runden $r = i+2k-1, \ldots, r = i+2k-h, \ldots, r = i+k+1$ mit dem Spieler $[(i+2k)*+]$ zu spielen haben. Von den Runden $i < r < i+2k$, die gemäß Satz 5 allein für eine Partie zwischen den Spielern $[i*-]$ und $[(i+2k)*+]$ in Frage kommen, scheiden also die Runden $i+1 \leqq r \leqq i+k-1$ aus, weil in ihnen $[i*+]$ mit anderen Spielern als $[(i+2k)*+]$ zu spielen hat; desgleichen die Runden $i-k+1 \leqq r \leqq i-2k-1$ wegen der Beanspruchung von $[(i+2k)*+]$ durch andere Gegner als $[i*-]$. Es bleibt also für die Partie von $[i*+]$ mit $[(i+2k)*-]$ nur die Runde $r = i+k$ übrig, natürlich mit den Farben $(-1)^{k-1}$ bzw. $(-1)^k$, die den beiden Spielern in dieser Runde zugewiesen sind.

Damit ist die Gültigkeit von Satz 4 auch für $h = k$ erkannt und dieser Satz durch vollständige Induktion bewiesen.

17. Mit Satz 4 ist sowohl die Realisierbarkeit der Typen-Kombination (5) als auch die Eindeutigkeit der zugehörigen Turnier-Verteilung festgestellt. Werden in allen Überlegungen durchwegs die Farben + und − miteinander vertauscht, so erhält man das analoge Resultat für die Typen-Kombination (6), sodaß die in Nr. **11** gestellten Aufgaben gelöst sind.

18. Aus den voranstehenden Entwicklungen, speziell aus Satz 4, kann man für irgend eine ungerade Spieleranzahl p ($\geqq 3$) eine Turnier-Tabelle gewinnen, die z.B. für $p = 5$, wenn wir den Spieler vom Typus $[i*+]$ kurz mit der Nummer i bezeichnen, so aussähe:

(1), 3 — 4, 5 — 2

(2), 4 — 5, 1 — 3

(3), 5 — 1, 2 — 4

(4), 1 — 2, 3 — 5

(5), 2 — 3, 4 — 1;

also: in der ersten Runde ist 1 spielfrei und es werden die Partien 3 gegen 4, 5 gegen 2 gespielt (dabei 3 und 5 mit Weiß) usw.

In der Praxis sind allerdings meist etwas andere von Richard SCHURIG (l. c. Nr. 5) aufgestellte Tabellen in Gebrauch, die sich aus den hier gewonnenen durch eine Umnumerierung der Spieler ergeben, also (vgl. Nr. 4) keine prinzipiell verschiedenen Tabellen darstellen[22]).

§ 5. Bemerkungen über Turnier-Verteilungen bei geradem p

19. Bei geradem p treten an die Stelle von Ia, IIa die Forderungen Ib, IIb (§ 2). In der Frage nach allen mit diesen Forderungen verträglichen Turnier-Verteilungen bin ich aber nicht zu einem so vollständigen Ergebnis wie für ungerades p gekommen: Man findet jedenfalls eine größere Mannigfaltigkeit zulässiger Turnier-Verteilungen, deren erschöpfende Kennzeichnung ich aber nicht geben kann, sodaß ich mich hier — schon mit Rücksicht auf den sonst zu großen Umfang dieses Beitrags — unter Verzicht auf Beweise auf einige Bemerkungen beschränken will.

20. In Nr. **10** haben wir von Spielern gesprochen, die einmal öfter mit — als mit — spielen, also unter allen $p-1=2n-1$ Runden insgesamt n-mal mit $+$ und $(n-1)$-mal mit $-$; es sind das Spieler, denen ein Typus $[i+]$ für die Farbenverteilung zukommt, wobei i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ ist[23]). Ein erstes Resultat, das man beweisen kann, ist

Satz 7. Wenn in einem Turnier ein bestimmter Typus $[i+]$ bei einem Spieler vorkommt, dann kommt auch der Typus $[i-]$ vor.

Die Typen treten also in Paaren einander „entgegengesetzter" Typen auf. Ein solches Paar werde kurz mit $[i\pm]$ bezeichnet.

21. Eine Kombination von Typenpaaren

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} [i_1\pm],\ [i_2\pm],\ \ldots,\ [i_n\pm] \\ (1\leq i_1<i_2<\cdots<i_n\leq 2n-1) \end{cases}$$

kann man sich veranschaulicht denken dadurch, daß man auf dem Kreis L (vgl. Nr. **13**), auf dem die Punkte $1, 2, \ldots, p-1$ die Ecken eines regelmäßigen $(p-1)$-Ecks bilden, die n Punkte $i_1, i_2, \ldots, i_n$ markiert. Bei diesen Figuren

$$\text{(10)} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

wollen wir zwei Arten durch besondere Benennungen unterscheiden: wir wollen eine solche Figur „*dicht*" nennen, wenn sie (gegebenenfalls im Sinne

[22]) Ein Prinzip zur bequemen Herstellung der SCHURIGschen Tabellen (das sich gegenüber dem ursprünglichen SCHURIGschen Verfahren durch größere Einfachheit auszeichnet) hat mir (zusammen mit der Ergänzung für gerade Spieleranzahl) vor vielen Jahren gelegentlich eines Zusammentreffens in Göttingen der Schachmeister PRCZEPIORKA mitgeteilt (auf den auch M. KRAITCHIK, l. c. Nr. **5**, S. 544, verweist). Wegen einer geometrischen Deutung für diesen Mechanismus vgl. Süddeutsche Schachzeitung, 1955, Heft 12, S. 276 und Archimedes, Schriftleit. F. Denk, Erlangen, 8. Jahrg., Heft 3/4, 1956, S. 41.

[23]) Natürlich können niemals zwei Spieler den gleichen Typus aufweisen, da ja dann in keiner Runde eine Partie zwischen ihnen möglich wäre, wo doch in einer Partie stets der eine mit $+$, der andere mit $-$ spielt.

zyklischer Anordnung) drei unmittelbar aufeinanderfolgende Eckpunkte enthält; andernfalls „*undicht*". Bei den letzteren kommen also nur vor: teils *isolierte* Eckpunkte i, wo weder $(i-1)$ noch $(i+1)$ zur Figur gehört; teils *Paare* benachbarter Eckpunkte[24]), niemals aber *Tripel* von unmittelbar aufeinanderfolgenden.

Indem wir die eben bei den Figuren (10) eingeführte Unterscheidung auf die Kombinationen von Typenpaaren (9) übertragen, nennen wir auch eine solche Kombination dicht bzw. undicht, wenn es die darstellende Figur ist.

Ferner wollen wir, analog wie in Nr. **12** eine Kombination (9) von Typenpaaren dann „realisierbar" nennen, wenn es wenigstens eine den Forderungen von § 2 genügende Verteilung aller $\frac{1}{2}p(p-1)=n(2n-1)$ Partien zwischen den $2n$ Spielern gibt, welche die Typen-Kombination (9) aufweist.

22. Man kann dann beweisen

Satz 8. Nur undichte Kombinationen von Typenpaaren können realisierbar sein.

Hier bleibt (für beliebiges p) die Frage offen, ob eine Kombination von Typenpaaren außer der Einschränkung, daß sie nicht dicht sein darf, noch weiteren Einschränkungen unterliegt, oder ob jede undichte Kombination auch realisierbar ist.

23. Eine spezielle realisierbare Kombination von n Typenpaaren ist

$$[1\pm],\ [3\pm],\ \ldots,\ [(p-1)\pm]; \tag{11}$$

in dieser sind, gemäß der in Nr. **21** besprochenen zyklischen Anordnung, $[(p-1)\pm]$ und $[1\pm]$ als benachbarte Typenpaare anzusehen. Es ist die Kombination (11) dadurch von Interesse, daß sie den üblichen Turnier-Tabellen entspricht. Aber Beispiele zeigen (und es gibt sie schon für $p=4$, $n=2$), daß bei geradem $p=2n$ durch eine realisierbare Kombination von n Typenpaaren keineswegs allgemein die Turnier-Verteilung eindeutig festgelegt ist (dies ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Fall eines ungeraden p).

24. Noch in anderer Hinsicht zeigt sich bei geradem p — verglichen mit ungeradem p — ein größerer Reichtum an Möglichkeiten: außer der Kombination (11) von Typenpaaren (und solchen, die in trivialer Weise daraus herleitbar sind) erweisen sich noch wesentlich andere Kombinationen als realisierbar, wozu beispielsweise für $p=8$, $n=4$ die Kombination

$$[1\pm],\ [2\pm],\ [4\pm],\ [5\pm] \tag{12}$$

angeführt sei[25]).

[24]) Die n zur Figur gehörenden Eckpunkte des $(2n-1)$-Ecks können natürlich nicht durchwegs isoliert sein. Die Figur muß also mindestens ein Paar benachbarter Eckpunkte enthalten. Es ist das z. B. bei der Figur $(1, 3, \ldots, 2n-1)$ das (im Sinn zyklischer Anordnung) benachbarte Paar $2n-1, 1$.

[25]) Auf Angabe einer Turnier-Verteilung, die diese Typen-Kombination realisiert, sei aus Gründen der Raumersparnis verzichtet.

25. In der großen Mannigfaltigkeit von Turnier-Tabellen, die sich im Rahmen der Forderungen aus § 2 bei gerader Spielerzahl als möglich erweisen, ergibt sich eine merkliche Einschränkung, wenn man noch die folgende Forderung III hinzunimmt, die vom Standpunkt der Praxis von Bedeutung ist, weil sie es gestattet, sich auf Tabellen mit geradem p zu beschränken:

III. In einer Tabelle für $p = 2n$ Spieler soll es wenigstens einen Spieler geben, nach dessen Weglassung eine unseren Forderungen Ia, IIa genügende Tabelle für $2n-1$ Spieler übrig bleibt.

Gemeint ist damit, daß in der so entstehenden Tabelle in jeder Runde derjenige Spieler spielfrei ist, der mit dem weggelassenen Spieler eine Partie zu spielen gehabt hätte. Dabei möge (gegebenenfalls nach einer Umnumerierung der $2n$ Spieler) dem wegzulassenden Spieler die Nummer $2n$ zugewiesen sein, sodaß die übrigbleibenden die Nummern 1 bis $2n-1$ behalten.

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß durch Forderung III alle diejenigen Kombinationen von Typenpaaren (9) ausgeschieden werden, bei denen die zugehörige Figur (10) auf dem Kreis L mehr als ein Paar benachbarter Punkte aufweist. Beispielsweise werden durch Forderung III Turnier-Tabellen ausgeschieden, die zur Kombination (12) gehören. Es bleiben dann, von unwesentlichen Abänderungen abgesehen, nur solche Kombinationen wie (11) übrig.

Diese Hinweise mögen hier genügen. Mag sein, daß sich ein andermal Gelegenheit ergibt, darauf zurückzukommen.

München 23, Trautenwolfstr. 7

(Eingegangen am 10. April 1956)

Die Mechanisierung des Weltbildes

Von Dr. **E. J. Dijksterhuis**, a. o. Professor für Wissenschaftsgeschichte an den Universitäten zu Leiden und Utrecht, Bilthoven/Holland. Ins Deutsche übertragen von Helga Habicht, Heidelberg. Mit 47 Abbildungen. VII, 594 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 36.—

Aus den Besprechungen: Dieses Buch gibt eine großartige Zusammenschau, im besten Sinne des Wortes „Studium generale" für uns Naturwissenschaftler: Am Anfang steht eine geballte Darstellung der griechischen Denkerschulen, ebenso, wie sie für uns bedeutungsvoll geworden sind, als Umwelt des Geistes, als Ansporn, als Hemmschuh. An dieses Bild knüpft Dijksterhuis seine Auseinandersetzung mit der Mathematik und Astronomie der Antike in ihrem großartigen Werden und zeigt, wieso damals zwar noch die Ansätze zu einer Mechanik, aber keine Physik und Technik darüber hinaus entstanden sind, trotz Archatas, Archimedes und Heron. Es folgen wertvolle Abschnitte über das Mittelalter, besonders die scholastische Wissenschaft, die in einem Lichte erscheint, wie es zwar den Historikern unter uns, kaum aber dem Naturwissenschaftler im allgemeinen bekannt sein wird: Dijksterhuis durchleuchtet diese Epoche und deckt Linien auf, die zu dem Aufschwung an der Wende von 1470 hinführen: Von da über Copernicus, Brahe, Galilei und Kepler zu Newton führt eine dramatisch gesteigerte Folge; ... Inmitten einer ganz anders gerichteten Welt entsteht die Klassische Mechanik im Barock und wird, nach ihrem triumphalen Erfolg bei der Bewältigung des Planetenproblems, zu einer geistigen, das Denken bis zum Weltbild prägenden Kraft. Das Zusammenspiel des Denkens, in Gestalt von Formeln in neuer Weise schon mechanisiert, und des zielbewußten Experiments — beides der Antike in dieser Art fremd — wird kennzeichnend für eine neue Zeit, eine neue Wissenschaft. Es führt weit hinaus über die Welt der Alten. Aber es führt auch bald zur Überschätzung der Möglichkeiten der Mechanik als Vorbild der Physik — und später zur Erkenntnis der Grenzen. ...

Jeder Naturwissenschaftler, dem es ernstlich darum zu tun ist, Kenntnis vom Werden der Klassischen Mechanik und damit der Klassischen Physik, der Astronomie und der Mathematik als einer geistigen Einheit zu gewinnen, wird dieses Buch mit reichem Gewinn zur Hand nehmen. Es ist meisterlich geschrieben und vortrefflich übersetzt.

„Die Naturwissenschaften"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXXVII. Band: **Mathematische Statistik**

Von Dr. **B. L. van der Waerden,** Professor der Mathematik an der Universität Zürich. Mit 39 Textfiguren und 13 Zahlentafeln. IX, 360 Seiten Gr.-8°. 1957.
DM 46.—; Ganzleinen DM 49.60

Inhaltsübersicht: Allgemeine Grundlagen. — Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten. — Mathematische Hilfsmittel. — Empirische Bestimmung von Verteilungsfunktionen, Mittelwerten und Streuungen. — FOURIER-Integrale und Grenzwertsätze. — GAUSSsche Fehlertheorie und STUDENTS Test. — Die Methode der kleinsten Quadrate. — Schätzung unbekannter Konstanten. — Auswertung von beobachteten Häufigkeiten. — Bio-Auswertung. — Prüfung von Hypothesen durch Tests. — Anordnungstests. — Korrelation. — Tafeln. — Beispiele, nach Fachgebieten geordnet. — Übersetzung englischer Fachausdrücke. — Namen- und Sachverzeichnis.

LXXXIX. Band: **Theorie der RIEMANNschen Flächen**

Von Dr. **A. Pfluger,** Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Mit 5 Textabbildungen. XII, 248 Seiten Gr.-8°. 1957.
DM 36.—; Ganzleinen DM 39.20

Inhaltsübersicht: Begriff der RIEMANNschen Fläche. — Analytische Fortsetzung und Überlagerungsfläche. — Homologie und Cohomologie. — Existenzsätze. — Uniformisierungstheorie. — Harmonische und analytische Differentiale. — Einige Klassen von RIEMANNschen Flächen. — Literatur- und Sachverzeichnis.

XC. Band: **Tabellen zur FOURIER-Transformation**

Von Dr. **F. Oberhettinger,** Professor der Mathematik, American University, Washington, D. C., USA. X, 214 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 35.80; Ganzleinen DM 39.50

Inhaltsübersicht: FOURIER-Kosinus-Transformationen. — FOURIER-Sinus-Transformationen. — Exponentielle FOURIER-Transformationen. — Anhang: Zusammenstellung von Abkürzungen und Definitionen der Funktionssymbole. — Literatur.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG. Würzburg
Printed in Germany